வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகள்

[DIFFERENTIAL EQUATIONS]

பகுதி - 2

தி. கோவிந்தராசன்



தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனம்

த. பா. நி. (க.வெ.) வரிசை எண்—595

வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகள்

(பகுதி 2)

(பட்டப்படிப்பிற்குரியது)

(திருத்தப்பட்ட பாடத் திட்டத்தின்கீழ் வெளியிடப்படுகின்றது)

ஆசிரியர்
தி. கோவிந்தராசன், எம்.ஏ., எல்.டி.,
கணிதப் பேராசிரியர்,
அரசினர் கலைக் கல்லூரி,
சேலம்.



தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனம்

First Edition—December, 1974

T.N.T.B.S. (C.P.) No. 595

© Tamilnadu Textbook Society

DIFFERENTIAL EQUATIONS (Vol. II)

T. GOVINDARAJAN

Price Rs. 7-10

Published by the Tamilnadu Textbook Society under the Centrally Sponsored Scheme of Production of books and literature in regional languages at the University level, of the Government of India in the Ministry of Education and Social Welfare (Department of Culture), New Delhi.

Printed by
Ravishankar Printers,
84, Perambur Barracks Road,
Madras—600007.

அணிந்துரை

திரு. இரா. நெடுஞ்செழியன்
(தமிழகக் கல்வி அமைச்சர்)

தமிழைக் கல்லூரிக் கல்வி மொழியாக ஆக்கிப் பதினைந்து ஆண்டுகள் ஆகிவிட்டன. குறிப்பிட்ட சில கல்லூரிகளில் பி.ஏ. வகுப்பு மாணவர்கள் தங்கள் பாடங்கள் அனைத்தையும் தமிழி லேயே கற்று வந்தனர். 1968ஆம் ஆண்டின் தொடக்கத்தில் புகுமுக வகுப்பிலும் (P.U.C.) 1969ஆம் ஆண்டிலிருந்து பட்டப் படிப்பு வகுப்புகளிலும் அறிவியல் பாடங்களையும் தமிழிலேயே கற்பிக்க ஏற்பாடு செய்துள்ளோம். தமிழிலேயே கற்பிப்போம் என முன்வந்துள்ள கல்லூரி ஆசிரியர்களின் ஊக்கம், பிற பல துறைகளிலும் தொண்டு செய்வோர் இதற்கெனத் தந்த உழைப்பு, தங்கள் சிறப்புத் துறைகளில் நூல்கள் எழுதித் தர முன்வந்த நூலாசிரியர்கள் தொண்டுணர்ச்சி இவற்றின் காரணமாக இத் திட்டம் நம்மிடையே மகிழ்ச்சியும், மன நிறைவும் தரத்தக்க வகையில் நடைபெற்று வருகிறது. இவ்வகையில் கல்லூரிப் பேராசிரியர்கள் கலை, அறிவியல் பாடங்களை மாணவர்க்குத் தமிழிலேயே பயிற்றுவிப்பதற்குத் தேவையான பயிற்சியைப் பெறுவதற்கு மதுரைப் பல்கலைக் கழகம் ஆண்டுதோறும் எடுத்து வரும் பெருமுயற்சியைக் குறிப்பிட்டுச் சொல்ல வேண்டும்.

பல துறைகளில் பணிபுரியும் பேராசிரியர்கள் எத்தனையோ நெருக்கடிகளுக்கிடையே குறுகிய காலத்தில் அரிய முறையில் நூல்கள் எழுதித் தந்துள்ளனர்.

வரலாறு, அரசியல், உளவியல், பொருளாதாரம், தத்துவம், புவியியல், புவியமைப்பியல், மனையியல், கணிதம், இயற்பியல், வேதியியல், உயிரியல், வானியல், புள்ளியியல், விலங்கியல், தாவர வியல், பொறியியல் ஆகிய எல்லாத் துறைகளிலும் தனி நூல்கள், மொழிபெயர்ப்பு நூல்கள் என்ற இரு வகையிலும் தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனம் வெளியிட்டு வருகிறது.

இவற்றுள் ஒன்றான **'வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகள்' பகுதி (2)** என்ற இந்நூல் தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனத்தின் **595**ஆவது வெளியீடாகும். கல்லூரித் தமிழ்க் குழுவின் சார்பில் வெளியான **35** நூல்களையும் சேர்த்து இதுவரை **630** நூல்கள் வெளிவந்துள்ளன. இந் நூல் மைய அரசு கல்வி, சமூக நல அமைச்சகத்தின் மாநில மொழியில் பல்கலைக் கழக நூல்கள் வெளி யிடும் திட்டத்தின்கீழ் வெளியிடப்படுகிறது.

உழைப்பின் வாரா உறுதிகள் இல்லை. ஆதலின், உழைத்து வெற்றி காண்போம். தமிழைப் பயிலும் மாணவர்கள் உலக மாணவர்களிடையே சிறந்த இடம் பெறவேண்டும். அதுவே தமிழன்னையின் குறிக்கோளுமாகும். தமிழ்நாட்டுப் பல்கலைக் கழகங்களின் பல்வகை உதவிகளுக்கும் ஒத்துழைப்புக்கும் நம் மனம்கலந்த நன்றி உரியதாகுக.

இரா. நெடுஞ்செழியன்

பொருளடக்கம்

---

34 56

11. இரண்டிற்கு மேற்பட்ட மாறிகள் கொண்ட சாதாரண வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகள்

(Ordinary Differential Equations with more than Two Variables)

11-0. இதுவரை நாம் இரு மாறிகள் (x, y) கொண்ட வகைக் கெழுச் சமன்பாடுகளின் தீர்வு காணும் முறைகள் பலவற்றைப் பார்த்தோம். இனி வரும் பகுதிகளில், இரண்டிற்கு மேற்பட்ட மாறிகள் தோன்றும் வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகளின் தீர்வு காணும் முறைகள் சிலவற்றைப் பார்ப்போம்.

அவை இரு வகைப்படும் :

(1) சாதாரண வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகள் (Ordinary)
(2) பகுதி வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகள் (Partial).

முதல் வகையில் ஒரே ஒரு சார்பில் மாறிதானிருக்கும். இரண்டாம் வகையில் ஒன்றுக்கு மேற்பட்ட சார்பில் மாறிகள் இருக்கும். (பின் கூறப்பட்ட வகையில் ஒரே ஒரு சார்புடை மாறிதா னிருக்குமெனவும் கூறலாம்).

இப் பகுதியில் முதல் வகையின் பாற்படும் சாதாரண வகைக் கெழுச் சமன்பாடுகளைப் பார்ப்போம். இவற்றினை முழுமையான வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகள் (Total differential equations) எனவும் கூறுவதுண்டு.

A

11-1. ஒருபடி ஒருங்கமை வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகள்

முதலில் எத்தனை சார்புடை மாறிகள் உள்ளனவோ அத்தனை ஒருங்கமை சமன்பாடுகள் கொடுக்கப்படவேண்டும். அவை

யாவும் நேரிய சமன்பாடுகளாகவும் (**Linear Equations**) இருக்க வேண்டும். எடுத்துக்காட்டாக,

$$\left.\begin{aligned} 2\frac{dx}{dt}+\frac{dy}{dt}-4x-y &= e^t \\ \frac{dx}{dt}\qquad\quad +3x+y &= t \end{aligned}\right\}\ldots A$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt}+\frac{dy}{dt}+x &= 1 \\ \frac{dx}{dt}+\frac{dz}{dt}+2x+z &= 1 \\ \frac{dx}{dt}+\frac{dy}{dt}+\frac{dz}{dt}+y &= 0 \end{aligned}\right\}\ldots B$$

என்ற ஒருங்கமை சமன்பாடுகளை எடுத்துக்கொள்வோம்.

(A)-ல், t சார்பிலா மாறி; x, y சார்புடை மாறிகள். இரண்டு ஒருங்கமை சமன்பாடுகள் தரப்பட்டுள்ளன. அவற்றை $D \equiv \dfrac{d}{dt}$ என்ற செயலி முறைப்படி,

$$\left.\begin{aligned} 2(D-2)x+(D-1)y &= e^t \\ (D+3)x+\qquad y &= t \end{aligned}\right\}\ldots A \text{ என எழுதலாம்.}$$

(B)-ல், t சார்பிலா மாறி; x, y, z மூன்றும் சார்புடை மாறிகள். மூன்று ஒருங்கமை சமன்பாடுகள் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. அவற்றினையும்

$$\left.\begin{aligned} (D+1)x+Dy &= 1 \\ (D+2)x+(D+1)z &= 1 \\ Dx+(D+1)y+Dz &= 0 \end{aligned}\right\}\ldots B \text{ என எழுதலாம்.}$$

11-1·1. முதலில் (A) என்ற சமன்பாடுகளின் தீர்வு காணும் முறையைப் பார்ப்போம். இயற்கணிதத்தில் $ax+by=c$, $a_1x+b_1y=c_1$ என்ற இரு ஒருங்கமை சமன்பாடுகளின் தீர்வு காண, முதலில் y ஐ விலக்கி, x-ன் மதிப்புக் கண்டு, பின்னர் ஈடு செய்வதோ, x ஐ விலக்கி y-ன் மதிப்புக் காணும்

முறையோ இங்குப் பயன்படுத்தப்படுவது காண்க. பெருக்கலுக்குப் பதிலாகச் செயலிகள் பயன்படுத்தப்படுவதையும் காண்க.

$$2\,(D-2)\,x+(D-1)\,y=e^t \quad \ldots(1)$$

$$(D+3)\,x+\qquad y=t \quad \ldots(2)$$

(2)ஐ $(D-1)$ கொண்டு இரு பக்கமும் செயற்படுத்தினுல்

$$(D-1)\,(D+3)x+(D-1)\,y=(1-t) \quad \ldots(3)$$

என வரும்.

(1)−(3) எடுத்தால்

$$2\,(D-2)\,x-(D-1)\,(D+3)\,x=e^t+t-1 \quad \ldots(4)$$

என வரும்.

இப்பொழுது (4)ஐச் சுருக்கி மாற்றி எழுதினுல்,

$(D^2+1)\,x=1-t-e^t$ என வரும்.

இதன் துணைத் தீர்வு $x=A\cos t+B\sin t$

$$\text{சிறப்புத் தீர்வு} = \frac{1}{D^2+1}-\frac{t}{D^2+1}-\frac{e^t}{D^2+1}$$

$$= 1-t-\frac{e^t}{2}$$

எனவே முழுத் தீர்வு,

$$x=A\cos t+B\sin t+1-t-\frac{e^t}{2} \quad \ldots(C)$$

இந்த x-ன் மதிப்பை (2)-ல் ஈடு செய்தால்

$$y=t-\frac{d}{dt}\left(A\cos t+B\sin t+1-t-\frac{e^t}{2}\right)$$

$$-\;3\left(A\cos t+B\sin t+1-t-\frac{e^t}{2}\right)$$

$$=t+A\sin t-B\cos t+1+\frac{e^t}{2}-3\,B\sin t$$

$$-3\,A\cos t\;-3\;+3t\;+3\;\frac{e^t}{2}$$

$$=(A-3B)\sin t-(3A+B)\cos t-2+4t+2e^t \quad \ldots(D)$$

(C), (D) இரண்டும் (A) என்ற ஒருங்கமை சமன்பாடுகளின் தீர்வுகளாகும்.

இவ்வாறு செய்யாமல், (1)ஐ $(D+3)$ கொண்டும், (2)ஐ $2(D-2)$ கொண்டும் செயல்படுத்தினுல்

$$2(D+3)(D-2)x+(D+3)(D-1)y=(D+3)e^t \qquad ...(5)$$

$$2(D+3)(D-2)x+2(D-2)y=2(D-2)t \qquad ...(6)$$

(5)−(6) எடுத்தால்,

$$(D+3)(D-1)y-2(D-2)y=e^t+3e^t-2+4t$$

என வரும்.

அதாவது

$(D^2+1)y=4e^t-2+4t$ என வரும்.

இதன் துணைத் தீர்வு $y=A_1\cos t+B_1\sin t$

$$\text{சிறப்புத் தீர்வு} = \frac{4.e^t}{D^2+1}-\frac{2}{D^2+1}+\frac{4t}{D^2+1}$$

$$=\frac{4e^t}{2}-2+4t$$

எனவே முழுத் தீர்வு,

$$y=A_1\cos t+B_1\sin t+2e^t-2+4t \qquad ...(E)$$

(D), (E) என y-க்கு வரும் தீர்வுகள் வேறு வேருகத் தோன்றினுலும், 'யாதாமொரு' மாறிலி என்ற பகுதிகளில்தான் வேறுபாடு தோன்றுவதைக் காணலாம்.

அதாவது $A_1=-(3A+B)$ ...(F)

$B_1=(A-3B)$ ...(G)

என்ற தொடர்பு இருப்பதைக் காணலாம். இவ்விரு சமன்பாடுகள் (F), (G) ஐயும், A, B-லுள்ள இரு ஒருங்கமை சமன்பாடுகளெனக் கொண்டால்,

$$A=\frac{B_1-3A_1}{10} \text{ எனவும், } B=\frac{(A_1+3B_1)}{10} \text{ எனவும் வரும்.}$$

அப்பொழுது,

$$x=\frac{B_1-3A_1}{10}\cos t-\frac{(A_1+3B_1)}{10}\sin t+1-t-\frac{e^t}{2}$$

எனவாகும்.

பொதுவாக, ஏதேனும் ஒரு சார்புடை மாறிக்குப் பெறப்படும் தீர்விலேதான் 'ஏதாவது' இரண்டு மாறிலிகள் தோன்றும். மற்ெறாரு சார்புடை மாறிக்குப் பெறப்படும் தீர்வில் வேறு இரு மாறிலிகள் தோன்றுவது போலிருப்பினும், அவை முதலிரு மாறிலிகளைச் சார்ந்தவையே; வேறிரண்டு 'ஏதாமொரு' மாறிலிகள் அல்ல என்பது கவனத்திற்குரியது. அதாவது (C)-லுள்ள A, B என்ற இரண்டும் (E)-லுள்ள A_1, B_1 என்ற இரண்டும் நான்கு வெவ்வேறானவை அல்ல; தொடர்புடையனவாகும். இரண்டு 'ஏதாவதாக' இருக்கலாம்; மற்ற இரண்டும் அப்படியல்ல, முதலிரண்டைச் சார்ந்தவை.

11-1·2. இவ்வாறே (B) என்ற அமைப்பிலுள்ள மூன்று ஒருங்கமை சமன்பாடுகளினின்றும் x, y, z என்பவற்றின் தீர்வுகளை 't'-ன் சார்பாகக் காணலாம்.

$$(D+1)\ x+Dy \qquad =1 \qquad \ldots(1)$$

$$(D+2)\ x+(D+1)\ z \qquad =1 \qquad \ldots(2) \qquad \ldots(B)$$

$$Dx+(D+1)\ y+Dz \qquad =0 \qquad \ldots(3)$$

(2)ஐ Dஆலும், (3)ஐ $(D+1)$ ஆலும் செயற்படுத்துக.

$$D\ (D+2)\ x+D\ (D+1)z=0 \qquad \ldots(4)$$

$$D\ (D+1)\ x+(D+1)^2\ y+D\ (D+1)z=0 \quad \ldots(5)$$

$$(4)-(5): \qquad Dx-(D+1)^2\ y=0 \qquad \ldots(6)$$

$$(1): \qquad (D+1)\ x+Dy=1 \qquad \ldots(1)$$

(6)ஐ $(D+1)$ ஆலும் (1)ஐ (D) ஆலும் செயற்படுத்துக.

$$D\ (D+1)\ x-(D+1)^3y=0 \qquad \ldots(7)$$

$$D\ (D+1)\ x+D^2y \qquad =0 \qquad \ldots(8)$$

$$(8)-(7): \ (D^3+4D^2+3D+1)\ y=0 \qquad \ldots(9)$$

$m^3+4m^2+3m+1=0$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வுகள் α, β, γ ஆக இருப்பின்,

$$y=A\ e^{\alpha t}+B\ e^{\beta t}+C\ e^{\gamma t} \qquad \ldots(10)$$

அல்லது தீர்வுகள் α, $\beta+i\gamma$, $\beta-i\gamma$ ஆக இருப்பின்,

$$y=A\,e^{\alpha t}+e^{\beta t}(B\cos\gamma t+C\sin\gamma t) \qquad \ldots(11)$$

(10) அல்லது (11) தீர்வாக இருக்கும்.

இவ்வாறே உரிய முறைகளில் x-ன் தீர்வையும் z-ன் தீர்வையும் காணலாம். தனித்தனியாக x-ன் தீர்வையும், z-ன் தீர்வையும் காணும்பொழுது, பொதுவாக வெவ்வேறு மாறிலிகள் (ஒவ்வொன்றற்கும் மூன்று) வரினும், 9 மாறிலிகளும் தொடர்புடையவையாயிருக்கும்; மூன்று மாறிலிகள் மட்டுமே 'தன்னிச்சையான' மாறிலிகளாயிருக்கும்; மீதி ஆறும் அம் மூன்ரூடு தொடர்பு கொண்டவையாயிருக்கும்.

(A) என்ற சமன்பாட்டில் இதே மாதிரியான ஒரு நிலை விளக்கப்பட்டதைக் காண்க.

11-1·3. இன்னும் பொதுவாகவும், பின்வரும் அமைப்பு களிலும் இவ்விதச் சமன்பாடுகள் வரலாம். தீர்வு காணும் முறை மேலே விளக்கப்பட்டதேயாம்.

$$\left.\begin{aligned} f_1(D)\,x+g_1(D)\,y+h_1(D)\,z&=T_1\\ f_2(D)\,x+g_2(D)\,y+h_2(D)\,z&=T_2\\ f_3(D)\,x+g_3(D)\,y+h_3(D)\,z&=T_3 \end{aligned}\right\}\ldots(C)$$

என்ற அமைப்பு மூன்று சார்புடை மாறிகள் கொண்ட ஒருங்கமை சமன்பாட்டிற்கு ஓர் எடுத்துக்காட்டு.

n சார்புடை மாறிகளோடு தொடர்புகொண்ட n சாதாரண வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகள், ஒருங்கமை சமன்பாடுகளாகக் கொடுக்கப்பட்டால், ஒவ்வொரு சார்புடை மாறியாக நீக்கி, கடைசியில் ஒரே ஒரு சார்புடை மாறி தோன்றும் சமன்பாடு கண்டு, அதனைத் தீர்ப்பதும், அதே மாதிரி மற்றவைகளைக் காண் பதுமே இந்த முறையின் அடிப்படையில் உள்ளது.

11-1·4. அணிக்கோவைகளைப் பயன்படுத்தியும் இவ்விதச் சமன் பாடுகளின் தீர்வு காணலாம்.

பின்வரும் எடுத்துக்காட்டு அம் முறையை விளக்கும்.

எடுத்துக்காட்டு 3.

$$(D-1)\,x+Dy = 2t+1$$
$$(2D+1)\,x+2Dy = t$$

என்ற ஒருங்கமை சமன்பாடுகளை எடுத்துக்கொள்வோம்.

$$a_1x+a_2y = c_1$$
$$b_1x+b_2y = c_2$$

என்ற இரு சமன்பாடுகளை எடுத்துக்கொள்வோம். அணிக் கோவைக் கொள்கைகளைப் பயன்படுத்தி இச் சமன்பாடுகளில் x, y காண்போமானால்,

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} x = \begin{vmatrix} c_1 & a_2 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}$$ என்றும்,

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ b_1 & c_2 \end{vmatrix}$$ என்றும் வரும்.

இந்த முறைப்படி,

$$\begin{vmatrix} D-1 & D \\ 2D+1 & 2D \end{vmatrix} x = \begin{vmatrix} 2t+1 & D \\ t & 2D \end{vmatrix}$$ என வரும்.

அதாவது $(2D^2-2D-2D^2-D)\,x = 4-1$

$$-3Dx = 3$$

$$Dx = -1$$

$$\frac{dx}{dt} = -1$$

$$x = -t+A$$

அவ்வாறே,

$$(2D^2-2D-2D^2-D)\,y = \begin{vmatrix} D-1 & 2t+1 \\ 2D+1 & t \end{vmatrix}$$

$$= 1-t-4-2t-1$$

$$= -3t-4$$

$$-3Dy = -3t-4$$

$$Dy = \frac{1}{3}(3t+4)$$

$$y = \frac{t^2}{2} + \frac{4}{3}t+B$$

$$\left.\begin{aligned} x &= A-t \\ y &= \frac{t^2}{2} + \frac{4t}{3} + B \end{aligned}\right\}$$ என்பது தீர்வு.

எனினும் A, B என்பவை இரு தொர்டர்பற்ற வெவ்வேறு மாறிலிகளாக இருக்க முடியாது; ஏனெனில் (x, t)ஐ இணைத்தும் (y, t)ஐ இணைத்தும் வரும் சமன்பாடுகள் முதல் வரிசைச் சமன்பாடுகளாகவே வருகின்றன.

A, B-க்கு உள்ள தொடர்பைப் பின்வருமாறு காணலாம்.

$x = A - t$ என்ற தீர்வை,

$(2D+1)\, x + 2Dy = t$ என்ற சமன்பாட்டில் ஈடு செய்தால்,
$-2 + A - t + 2Dy = t$ என வரும்.

அதாவது $2Dy = 2t + 2 - A$

$$\therefore \quad Dy = t + 1 - \frac{A}{2}$$

$$y = \frac{t^2}{2} + t - \frac{A}{2}t + B$$

$$= \frac{t^2}{2} + \left(1 - \frac{A}{2}\right)t + B$$

என வரும்.

$\left(1 - \frac{A}{2}\right) = \frac{4}{3}$ எனக் கொள்வதால்

$A = -2/3$ என வரும்.

$$\therefore \quad \left.\begin{aligned} x &= -t - \frac{2}{3} \\ y &= \frac{t^2}{2} + \frac{4t}{3} + B \end{aligned}\right\}$$

என்பது இவ்விரு ஒருங்கமை சமன்பாடுகளின் தீர்வுகளாகும்.

பயிற்சி 11·1

பின்வரும் ஒருங்கமை சமன்பாடுகளின் தீர்வுகள் காண்க :

(1) $(D+5)\, x + y = e^{t}$

$(D+3)\, y - x = e^{2t}$ (ப.க.)

(2) $(4D-7)\, x + (2D-3)\, y = e^{2t}$

$(3D-5)\, x + (D-1)\, y = 0$

(3) $(D+2)\, x + 3y = 0$

$3x + (D+2)y = 2e^{2t}$

(4) $(D^2-2)\,x-3y = e^{2t}$

$(D^2+2)\,y+x = 0$, கட்டுப்பாடு : $t=0$

ஆகும்பொழுது $x=y=1$; மேலும் $Dx=Dy=0$

(5) $D^2x-m^2y = 0$

$D^2y+m^2x = 0$

(6) $(D-1)\,x+(D+2)y=e^t+1$

$(D+2)\,y+(D+1)z = e^t+2$

$(D-1)\,x+(D+1)z = e^t+3$

(7) $\dfrac{dx}{dt} = ny-mz$

$\dfrac{dy}{dt} = lz-nx$

$\dfrac{dz}{dt} = mx-ly$ (*Murray*)

(8) $\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{(t-2x)}{t}$

$\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{(tx+ty+2x-t)}{t}$

(9) $(2D^2+1)\,x-y = 3\cos 3t$

$(3D^2+2)\,y-x = 0$

(10) $\dfrac{d^2x}{dt^2}+\dfrac{d^2y}{dt^2} = 4aw^2$

$\dfrac{d^2x}{dt^2}+w^2x-\dfrac{d^2y}{dt^2}-w^2y = -4\,aw^2.$

கட்டுப்பாடு $t = 0$ ஆகும்பொழுது $x = y$

$= \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{dy}{dt} = 0$

விடை 11·1

(1) $x = e^{-4t} - (A+Bt) + \frac{4e^{t}}{25} - \frac{e^{2t}}{36}$;

$y = -e^{-4t}(A+Bt+B) + \frac{e^{t}}{25} + \frac{7e^{2t}}{36}$

(2) $x = e^{2t}\left((A+Bt-\frac{t^2}{4}\right)$

$y = e^{2t}\left[\frac{t^2}{4} + t(1-B) - A - 2B - 1\right]$

(3) $x = Ae^{t} + Be^{-5t} - \frac{6}{7}e^{2t}$

$y = -Ae^{t} + Be^{-5t} + \frac{8}{7}e^{2t}$

(4) $x = \frac{1}{4}\left(3e^{t} + 7e^{-t}\right)$

$- \frac{1}{10}\left(19\cos t - 2\sin t\right) + \frac{2}{5}e^{2t}$

$y = -\frac{1}{12}\left(3e^{t} + 7e^{-t}\right)$

$+ \frac{1}{10}\left(19\cos t - 2\sin t\right) - \frac{1}{15}e^{2t}$

(5) $x = e^{mt/\sqrt{2}}\left(A\cos\frac{mt}{\sqrt{2}} + B\sin\frac{mt}{\sqrt{2}}\right)$

$+ e^{-mt\sqrt{2}}\left(C\cos\frac{mt}{\sqrt{2}} + E\sin\frac{mt}{\sqrt{2}}\right)$

$y = e^{mt/\sqrt{2}}\left(B\cos\frac{mt}{\sqrt{2}} - A\sin\frac{mt}{\sqrt{2}}\right)$

$+ e^{-mt/\sqrt{2}}\left(C\sin\frac{mt}{\sqrt{2}} - E\cos\frac{mt}{\sqrt{2}}\right)$

(6) $x = Ae^{t} + \frac{te^{t}}{2} - 1$

$y = Be^{-2t} + \frac{e^{t}}{6}$

$z = Ce^{-t} + \frac{e^{t}}{4} + 2$

(7) $x = A_1 \sin Kt + A_2 \cos Kt + A_3$

$y = B_1 \sin Kt + B_2 \cos Kt + B_3$

$z = C_1 \sin Kt + C_2 \cos Kt + C_3$

இங்கு $K^2 = l^2 + m^2 + n^2$; A_1, A_2.........என்ற மாறிலிகளிடை பின்கண்ட தொடர்புகள் உள்ளன :

$$\frac{mC_1 - nB_1}{A_2} = \frac{nA_1 - lC_1}{B_2} = \frac{lB_1 - mA_1}{C_2} = \mu$$

$$lA_1 + mB_1 + nC_1 = 0; \quad \frac{A_3}{l} = \frac{B_3}{m} = \frac{C_3}{n}$$

(8) $x = \frac{a}{t^2} + \frac{t}{3}$; $x + y = be^{t}$

(9) $x = A \cos t + B \sin t + C \cos \alpha t + E \sin \alpha t - \frac{75 \cos 3t}{424}$

$y = -A \cos t - B \sin t + \frac{2}{3} C \cos \alpha t$

$+ \frac{2}{3} E \sin \alpha t + \frac{3 \cos 3t}{424}$

$\alpha = \frac{1}{\sqrt{6}}$

(10) $x = aw^2t^2 - 2a\,(1 - \cos wt)$

$y = aw^2t^2 + 2a\,(1 - \cos wt)$

B

11-2. ஒருங்கமை சமன்பாடுகள்—முதல் வரிசை, முதற்படி

பிரிவு (A)-ல் விளக்கப்பட்ட முறையல்லாது மற்ருெரு சுருக்கமான முறையிலும் இவ்விதமான சமன்பாடுகளின் தீர்வு காண முடியும். மூன்று மாறிகள் கொண்ட சமன்பாடுகளை முதலில் பார்ப்போம். ஆனால் விளக்கப்படும் முறை n மாறிகளுக்கு ஏற்றபடி விரிவாக்கிக் கொள்ளக் கூடியதேயாம்.

பொதுவமைப்பு :

$$\left.\begin{aligned} P_1dx+Q_1dy+R_1dz=0 \\ P_2dx+Q_2dy+R_2dz=0 \end{aligned}\right\} \ldots (A)$$

இங்கு P_1, P_2,.........யாவும் x, y, z ஐ யொட்டிய சார்புகளாகக் கொள்ளலாம். குறுக்குப் பெருக்கல் முறைப்படி,

$$\frac{\frac{dx}{dz}}{Q_1R_2-R_1Q_2} = \frac{\frac{dy}{dz}}{R_1P_2-R_2P_1} = \frac{1}{P_1Q_2-P_2Q_1}$$

என (A) என்ற சமன்பாடுகளை விகித முறையில் எழுதலாம்.

$$\text{எனவே, } \frac{dx}{Q_1R_2-Q_2R_1} = \frac{dy}{R_1P_2-R_2P_1} = \frac{dz}{P_1Q_2-P_2Q_1}$$

என்ற வகையிலும் எழுதலாம். இந்த அமைப்பு

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R} \qquad \ldots . (B)$$

என்ற வகையில் இருப்பது கண்கூடு; P, Q, R—சார்புகள்.

எனவே, இப்பொழுது (B) என்ற அமைப்பில் உள்ள சமன்பாடுகளைத் தீர்க்கும் முறைகளைப் பார்ப்போம்.

குறிப்பு : சில சமன்பாடுகளில் (B) என்ற அமைப்பில் இரு உறுப்புகளில் ஏதாவது ஒரு மாறி—(z எனக் கொள்வதில் பொதுமை மாருது)—தோன்ருமல் இருக்கலாம். எடுத்துக் காட்டாக,

$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q}$ என்ற சமன்பாட்டில் z தோன்றவில்லையானுல், இதைச் சாதாரணமாகத் தீர்க்கலாம். இந்தத் தீர்வு கொண்டு, (B)-ல் உள்ள மற்றச் சமன்பாட்டோடு மற்ருெரு தீர்வு காணலாம்,

11-2·1. எ. கா. 1.

$\frac{dx}{xy} = \frac{dy}{y^2} = \frac{dz}{z^2}$ என்ற சமன்பாடுகளை எடுத்துக்கொள்வோம்.

$$\text{இங்கு } \frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{xy} = \frac{y}{x}$$

$$\therefore \quad x\,dy = y\,dx$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}$$

$$\therefore \quad y = cx \text{ என்பது ஒரு தீர்வாகும்.} \quad ...(1)$$

இதைக் கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டின் முதல் உறுப்பில் ஈடு செய்தால்,

$$\frac{dx}{cx^2} = \frac{dz}{z^2} \text{ என வரும்.}$$

$$\text{இதன் தீர்வு } -\frac{1}{cx} = -\frac{1}{z} + K$$

$$\frac{1}{z} - \frac{1}{cx} = K$$

$$\text{அல்லது } \frac{1}{z} - \frac{1}{y} = K \quad ...(2)$$

(1)–ம், (2)–ம் கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டின் தீர்வுகளாகும்.

எ. கா. 2.

$$\frac{dx}{xy} = \frac{dy}{x^3+y^2} = \frac{dz}{z^2}$$

என்ற சமன்பாடுகளை எடுத்துக்கொள்வோம்.

$$\text{இங்கு } \frac{dy}{dx} = \frac{x^2+y^2}{xy}$$

இது ஒரு சமபடிச் சமன்பாடு.

$y = vx$ எனக் கொண்டால்,

$$v + x\frac{dv}{dx} = \frac{1+v^2}{v} = v + \frac{1}{v}$$

$$\therefore \quad x\frac{dv}{dx} = \frac{1}{v}$$

$\int v\, dv = \int \frac{dx}{x}$ என எழுதலாம்.

$$\frac{v^2}{2} = \log Cx$$

அதாவது $v^2 = 2 \log Cx$
$= \log Ax^2$

$\therefore \quad \frac{y^2}{x^2} = \log Ax^2$ என்பது ஒரு தீர்வு.

$$\therefore \quad y^2 = x^2 \log Ax^2.$$

இதைக் கொண்டு

$\frac{dx}{x \sqrt{x^2 \log Ax^2}} = \frac{dz}{z^2}$ என்ற சமன்பாடு பெறலாம்.

எனவே $\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{\log Ax^2}} = \int \frac{dz}{z^2}$
$= -\frac{1}{z} + B$

என்ற மற்றொரு தீர்வு கிடைக்கும்.

எனவே $y^2 = x^2 \log Ax^2$ என்பதும்,

$B - \frac{1}{z} = \int \frac{dx}{x^2 \sqrt{\log Ax^2}}$ என்பதும்

கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடுகளின் தீர்வாகும்.

எ. கா. 3.

$$\frac{dx}{xz} = \frac{dy}{yz} = \frac{dz}{1+z^2}$$

என்ற சமன்பாடுகளின் தீர்வு காண்போம். இச் சமன்பாடுகளை

$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{z\, dz}{1+z^2}$ என எழுதலாம்.

எனவே ஒரு தீர்வு $\int \frac{dx}{x} = \int \frac{dy}{y}$

மற்றொரு தீர்வு $\int \frac{dy}{y} = \int \frac{z\,dz}{1+z^2}$

அதாவது $x = cy$ ... ஒரு தீர்வு

$A^2y^2 = 1+z^2$ ... மற்றொரு தீர்வு

11·3. ஆனல் பொதுவாக, மேற்கூறிய முறை எல்லாச் சமன்பாடுகளுக்கும் பயன்படாது. எனவே, ஒரு பொதுமுறை தேவைப்படுகிறது. இயற்கணிதத்தில், தகவு, தகவுப் பொருத்தம் என்ற தலைப்பிலே நாம் பின்வரும் தேற்றம் கண்டிருக்கிறோம்.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} \text{ ஆனல்,}$$

ஒவ்வொன்றும் $\frac{la+mc+ne}{lb+md+nf}$, $\frac{l'a+m'c+n'e}{l'b+m'd+n'f}$ -க்குச் சமம் என்பது தேற்றம்.

இதையே $\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R}$ என்பவற்றிற்கும் பயன்படுத்தலாம்; தேற்றப்படி,

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R} = \frac{l\,dx+m\,dy+n\,dz}{lP+mQ+nR} \quad \ldots (C)$$

$$= \frac{l'dx+m'dy+n'dz}{l'P+m'Q+n'R}$$

என்றவாறு எழுதலாம். இங்கு l, l'.........என்பவை மாறிலிகளாகவு மிருக்கலாம்; சார்புகளாகவும் இருக்கலாம்.

11·2-ல், (B) என்ற சமன்பாடுகளும், இங்கு நாம் பெற்றிருக்கும் (C) என்ற சமன்பாடுகளும் ஒன்றே.

l, l'.........என்பனவற்றை நாம் வசதியாகத் தேர்ந்தெடுக்க முடியுமானல், (C) என்ற வரிசையிலுள்ள சமன்பாடுகளைத் தீர்க்க முடியலாம்.

சிறப்பாக $lP+mQ+nR$ பூச்சியமாகும் வகையில் நாம் l, m, n ஐத் தேர்ந்தெடுத்தால், உடனடியாக $l\,dx+m\,dy+n\,dz = 0$ என்ற சமன்பாடு கிடைக்கும். $l\,dx+m\,dy+n\,dz = du$ என இருக்குமாயின் $u = a$ (மாறிலி) என்பது ஒரு தீர்வாகக் கிடைக்கும். அதே மாதிரி l', m', n'-ம் தேர்ந்தெடுக்கப்பட்டு $l'dx+m'dy+n'dz = dv$ என இருக்குமாயின் $v=b$ (மாறிலி) என்பது இரண்டாவது தீர்வாக இருக்கும்.

ஆனால் $u=a$ என்ற தீர்வும்,

$v=b$ என்ற தீர்வும்

ஒன்றுக்கொன்று தொடர்பற்றவையாய் இருத்தல் வேண்டும். இது இன்றியமையாததொரு கட்டுப்பாடாகும்.

11-3·1. எ.கா.

$$\frac{adx}{(b-c)\,yz}=\frac{bdy}{(c-a)\,zx}=\frac{cdz}{(a-b)\,xy}$$

என்ற சமன்பாட்டின் இரு தொடர்பற்ற தீர்வுகள் காண்க.

$$\frac{adx}{(b-c)\,yz}=\frac{bdy}{(c-a)\,zx}=\frac{cdz}{(a-b)\,xy}$$

$$=\frac{ax\,dx+by\,dy+cz\,dz}{xyz\,(b-c)+xyz\,(c-a)+xyz\,(a-b)} \quad ...(1)$$

$$=\frac{a^2x\,dx+b^2y\,dy+c^2z\,dz}{a(b-c)\,xyz+b\,(c-a)\,xyz+c(a-b)xyz} \quad ...(2)$$

(1), (2)—ல் கீழெண்கள் பூச்சியமாவது காண்க.

$$\therefore\ ax\,dx+by\,dy+cz\,dz=0 \quad ...(3)$$

$$a^2x\,dx+b^2y\,dy+c^2z\,dz=0 \quad ...(4)$$

(3),(4)—ன் தொகை காண,

$$ax^2+by^2+cz^2=A$$

$$a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2=B$$

என்ற இரு தொடர்பற்ற தீர்வுகள் பெறப்படும்.

இவைதாம் கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டின் தீர்வுகளாகும்.

பயிற்சி 11·2

பின்வரும் சமன்பாடுகளின் தீர்வு காண்க ;

(1) $\dfrac{dx}{x}=\dfrac{dy}{x+z}=\dfrac{dz}{-z}$

(2) $\dfrac{x\,dx}{y^2}=\dfrac{y\,dy}{x^2}=\dfrac{dz}{z}$

(3) $\dfrac{x^{n-1}\,dx}{y^n} = \dfrac{y^{n-1}\,dy}{x^n} = \dfrac{dz}{z}$

(4) $\dfrac{dx}{x^2+y^2} = \dfrac{dy}{2xy} = \dfrac{dz}{z\,(x+y)^3}$

(5) $\dfrac{dx}{2x} = \dfrac{dy}{-y} = \dfrac{dz}{4xy^2-2z}$

(6) $\dfrac{dx}{yz} = \dfrac{dy}{3xz} = \dfrac{dz}{3xy}$

(7) $\dfrac{dx}{x^2-y^2-z^2} = \dfrac{dy}{2xy} = \dfrac{dz}{2xz}$

(8) $\dfrac{dx}{x(z^2-y^2)} = \dfrac{dy}{y\,(x^2-z^2)} = \dfrac{dz}{z\,(y^2-x^2)}$

(9) $\dfrac{dx}{x^2+y^2-yz} = \dfrac{dy}{xz-x^2-y^2} = \dfrac{dz}{(x-y)\,z}$

(10) $\dfrac{dx}{x^2} = \dfrac{dy}{y^2} = \dfrac{dz}{n\,xy}$

(11) $\dfrac{dx}{3y-2z} = \dfrac{dy}{z-3x} = \dfrac{dz}{2x-y}$

(12) $\dfrac{dx}{x\,(2y^4-z^4)} = \dfrac{dy}{y\,(z^4-2x^4)} = \dfrac{dz}{z\,(x^4-y^4)}$

விடை 11·2

(1) $xz=A;\quad y-x+z=B$

(2) $x^4-y^4=A;\quad x^2+y^2=B^2z^2$

(3) $x^{2n}-y^{2n}=A;\quad x^n+y^n=B^nz^n$

(4) $(x+y)^2=A+2\log z;\quad y=B(x^2-y^2)$

(5) $xy^2=A;\quad 2xy^2-z=By^2$

(6) $3x^2-y^2=A; \quad y^2-z^2=B$

(7) $y=Az; \quad x^2+y^2+z^2=Bz$

(8) $x+yz=A; \quad x^2+y^2+z^2=B$

(9) $x^2+y^2=Az^2; \quad x+y=B+z$

(10) $x-y=A\,xy; \quad z=\dfrac{n\,xy}{y-x}\log\left(\dfrac{y}{x}\right)+B$

(11) $x+2y+3z=A; \quad x^2+y^2+z^2=B$

(12) $x\,yz^2=A; \quad x^4+y^4+z^4=B$

11-4. முதல் வரிசை, முதற்படி ஒருங்கமைச் சமன்பாட்டுத் தீர்வுகளின் பொது அமைப்பு

முன்பு 11·3-ல் (c) என்ற அமைப்பில் $l\,dx+m\,dy+n\,dz$ என்பது ஒரு பொருத்தமான வகை நுண்ணெண்ணுயிருப்பின், (exact differential), அதாவது $l\,dx+m\,dy+n\,dz=du$ என இருப்பின் $du=\dfrac{\delta u}{\delta x}dx+\dfrac{\delta u}{\delta y}dy+\dfrac{\delta u}{\delta z}dz$ என்று நமக்குத் தெரியுமாதலால்,

l, m, n என்பவை முறையே $\dfrac{\delta u}{\delta x}, \dfrac{\delta u}{\delta y}, \dfrac{\delta u}{\delta z}$ என்பவற்றிற்கு நேர்த் தகவுப் பொருத்தமுடையவையாயிருக்கும்.

ஆகவே, $lP+mQ+nR=0$ என்பதை

$$P\frac{\delta u}{\delta x}+Q\frac{\delta u}{\delta y}+R\frac{\delta u}{\delta z}=0 \qquad \text{......}(D)$$

என எழுதலாம். எனவே $u\,(x,y,z)=a$ என்பது

$\dfrac{dx}{P}=\dfrac{dy}{Q}=\dfrac{dz}{R}$ என்ற சமன்பாட்டுக்குள்ள தீர்வுகளில் ஒன்ருனல், அதே $u\,(x,y,z)=a$ என்பது,

$P\dfrac{\delta u}{\delta x}+Q\dfrac{\delta u}{\delta y}+R\dfrac{\delta u}{\delta z}=0$ என்ற சமன்பாட்டுக்குரிய ஒரு தீர்வாகும்.

மறுதலையாக, (D) என்ற சமன்பாட்டிற்கு $u(x, y, z) = a$ என்பது ஒரு தீர்வானுல்,

அதே $u(x, y, z) = a$ என்பது

$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R}$ என்ற சமன்பாட்டுக்குரிய தீர்வுகளில் ஒன்ருகும் என்று நிறுவலாம்.

நிறுவன் முறை

$$\frac{\frac{\delta u}{\delta x}dx + \frac{\delta u}{\delta y}dy + \frac{\delta u}{\delta z}dz}{P\frac{\delta u}{\delta x} + Q\frac{\delta u}{\delta y} + R\frac{\delta u}{\delta z}}$$

என்பதை எடுத்துக் கொள்வோம்.

$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R}$ என்ற தகவுப் பொருத்தச் சமன் பாட்டில், மேலெண், கீழெண் இரண்டையும்,

முறையாக $\frac{\delta u}{\delta x}$, $\frac{\delta u}{\delta y}$, $\frac{\delta u}{\delta z}$ ஆல் பெருக்கி, தகவுப் பொருத்தத் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தினுல்

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R} = \frac{\frac{\delta u}{\delta x}dx + \frac{\delta u}{\delta y}dy + \frac{\delta u}{\delta z}dz}{P\frac{\delta u}{\delta x} + Q\frac{\delta u}{\delta y} + R\frac{\delta u}{\delta z}}$$

என்ற சமன்பாடுகளைப் பெறலாம்.

ஆனுல் $P\frac{\delta u}{\delta x} + Q\frac{\delta u}{\delta y} + R\frac{\delta u}{\delta z} = 0$ என்ற சமன்பாட்டிற்கு $u(x, y, z) = a$ என்பது ஒரு தீர்வென ஏற்றுக் கொண்டிருக்கிறேம்.

$$\therefore \quad \frac{\delta u}{\delta x}dx + \frac{\delta u}{\delta y}dy + \frac{\delta u}{\delta z}dz = 0 \text{ ஆகிறது.}$$

ஆனுல் $du = \frac{\delta u}{\delta x}dx + \frac{\delta u}{\delta y}dy + \frac{\delta u}{\delta z}dz$ என நாம் அறிவோம்.

$\therefore$ $u(x, y, z) = a$ என்பது $\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R}$ என்ற சமன்பாட்டிற்கொரு தீர்வாகும்.

எனவே முன்பு நிறுவப்பட்ட இரு பகுதிகளையும் ஒரு தேற்ற மாகக் கூறுவோம் :

$$\textbf{தேற்றம் :} \quad P \frac{\delta u}{\delta x} + Q \frac{\delta u}{\delta y} + R \frac{\delta u}{\delta z} = 0$$

என்ற சமன்பாட்டிற்கு $u = a$ என்பது ஒரு தீர்வாக இருக்க வேண்டுமானல், $u = a$ என்பது $\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R}$ என்ற சமன் பாட்டிற்கு ஒரு தீர்வாகும்; இதன் மறுதலையும் உண்மையாம். மேலும் $u = a$, $v = b$ என இரு தீர்வுகள் $\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R}$ என்ற சமன்பாடுகளுக்குப் பொருந்துமாயின்

$\varphi\ (u, v) = \varphi\ (a, b) = c$ அல்லது $\varphi\ (u, v) = 0$.என்ற தீர்வும் பொருந்தும் என நிறுவலாம். (ஏனெனில் C என்ற மாறிலியை $\varphi(u,v)$-லேயே சேர்த்து விடலாம்.) பொது நிறுவன் முறையைப் பயிற்சியாகக் கொள்க. இரண்டு எடுத்துக் காட்டுகள் பின்னர் விளக்கப்படுத்தப் பட்டிருக்கின்றன.

11-4·1 எ. கா.

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{-y} = \frac{dz}{z} \qquad \ldots(1)$$

என்ற சமன்பாட்டை எடுத்துக் கொள்வோம்.

$xy = a$

$yz = b$ என்ற இரு தீர்வுகள் வரும்.

முன் கூறியபடி $u \equiv (xy - a) = 0$

$v \equiv (yz - b) = 0$

என இத் தீர்வுகளை எடுத்துக்கொண்டு,

$\varphi\ (u, v) \equiv \varphi\ (xy - a,\ yz - b) = c$ என்பதும், (1) என்ற சமன் பாடுகளின் மற்றோர் தீர்வு என இரண்டு எளிய φ-அமைப்புகளைக் கொண்டுச் சரி பார்ப்போம்.

முதலில் φஐ

$xy - a + yz - b = 0$

அல்லது $xy + yz = a + b$

$= c \qquad \ldots(2)$

என்ற அமைப்பில் கொள்வோம்.

(2)-ன் முழு வகை நுண்ணெண் கண்டால்,

$x\,dy+y\,dx+z\,dy+y\,dz=0$ என வரும்.

இதை $y\,dx+(x+z)\,dy+y\,dz=0$ ...(3)

என எழுதுவோம்.

இப்பொழுது, $$\frac{dx}{x}=\frac{dy}{-y}=\frac{dz}{z}=\frac{y\,dx+(x+z)dy+y\,dz}{xy-y(x+z)+yz}$$

$$=\frac{y\,dx+(x+z)\,dy+y\,dz}{0} \quad ...(4)$$

என வரும்.

எனவே $y\,dx+(x+z)\,dy+y\,dz=0$ என வரும். இதன் தீர்வு $xy+yz=c$ என (2), (3) லிருந்து நேரடியாகப் புலனாகும். எனவே (1)-ன் மற்றொரு தீர்வு,

$xy+yz=c$ என்பதாகும்.

இரண்டாவதாக φ-ஐ

$\sin(xy)+\cos(yz)+c$ என்ற அமைப்பில் ...(5)

கொண்டு, இதுவும் (1)-க்கு ஒரு தீர்வாயெனச் சரி பார்ப்போம்.

(5)-ன் முழுவகை நுண்ணெண் கண்டால்,

$$\cos(xy)\left\{x\,dy+y\,dx\right\}-\sin yz\,(y\,dz+z\,dy)=0$$

என வரும். இதை

$y\cos(xy)\,dx+[x(\cos xy)-z\sin(yz)]dy-y\sin(yz)\,dy=0$

என எழுதுவோம். ...(6)

இப்பொழுது,

$$\frac{dx}{x}=\frac{dy}{-y}=\frac{dz}{z}$$

$$=\frac{y\cos(xy)\,dx+[x\cos(xy)-z\sin(yz)]\,dy-y\sin(yz)\,dz}{xy\cos(xy)-xy\cos(xy)+yz\sin(yz)-yz\sin(yz)}$$

என வரும். ...(7)

(7)-ல் கடைசி உறுப்பில் கீழெண் பூச்சியமாவதைக் காண்க.

$\therefore\; y\cos(xy)\,dx+[x\cos(xy)-z\sin(yz)]\,dy-y\sin(yz)\,dz=0$ ஆகும். (5), (6)-ன்படி இதன் தீர்வு $\sin(xy)+\cos(yz)=c$ என வரும். எனவே $\frac{dx}{x}=\frac{dy}{-y}=\frac{dz}{z}$ என்ற சமன்பாட்டின் மற்றொரு தீர்வு $\varphi(u, v)=c$ எனப்படுகின்ற

$\sin(xy)+\cos(yz)=c$ என வரும். எனவே இரண்டு எடுத்துக் காட்டுகளால், (1)-க்கு $u=a$, $v=b$ என இரு சார்பற்ற தீர்வுகளிருப்பின் $\varphi(u,v)=c$ என்பது அல்லது $\varphi(u,v)=0$ என்பது (1)-க்கு மற்ருெரு தீர்வாகுமெனத் தெரிகிறது.

C

11-5. தொகை காணக்கூடிய தனிச் சமன்பாடு—தொகைத் தீர்வு பெறக் கட்டுப்பாடு (Single differential equation that is integrable—condition for integrability)

$$P\,dx+Q\,dy+R\,dz=0 \qquad \ldots(A)$$

என்ற சமன்பாட்டை எடுத்துக் கொள்வோம்.

$$du=P\,dx+Q\,dy+R\,dz \text{ அல்லது}$$
$$du=\mu P dx+\mu Q dy+\mu R dz \ (\mu\text{-ஒரு சார்பு})$$

என்ற பொருத்தம் உள்ள வகையில்

$u\equiv u(x,y,z)=a$ என்ற ஒரு சார்பு இருக்குமாயின், $u(x,y,z)=a$ என்பது (A)-ன் 'தீர்வு' அல்லது 'தொகைத் தீர்வு' எனப்படும்.

எடுத்துக்காட்டாக

$$(1)\quad 2x\,dx+2y\,dy+3z^2dz=d(x^2+y^2+z^3)=du$$

என்பது மேற்கூறியதற்குப் பொருந்துவது காண்க.

இங்கு $u=x^2+y^2+z^3$

மேலும்

$$(2)\quad x\,dy+y\,dx+y\,dz+z\,dy=d(xy+yz)=du$$
$$(3)\quad \sin x\,dx+\cos y\,dy+\tan z\,dz=d(\sin y-\cos x+\log\sec z)$$
$$=du$$

என்பவை மற்றும் மேற்கூறியதற்குப் பொருத்தமாக இருப்பது காண்க.

ஆனல் இந்த வகையில்

$P\,dx+Q\,dy+R\,dz$ அமைய வேண்டுமாயின், என்ன கட்டுப்பாடு, P, Q, R என்ற சார்புகளிடையே நிலவவேண்டுமெனப் பார்ப்போம். $P\,dx+Q\,dy+R\,dz=0$ என்ற சமன்பாட்டிற்கு $u=a$ என்ற தீர்வு இருப்பதாகக் கொள்வோம். அப்படியாயின்,

$$du = \frac{\delta u}{\delta x}\, dx + \frac{\delta u}{\delta y}\, dy + \frac{\delta u}{\delta z}\, dz$$

என்ற உண்மை நமக்குத் தெரியுமாதலால், P, Q, R என்பவை முறையே $\frac{\delta u}{\delta x}$, $\frac{\delta u}{\delta y}$, $\frac{\delta u}{\delta z}$ என்பவற்றிற்கு நேர்த் தகவுப் பொருத்தம் பெற்றிருக்க வேண்டும். அதாவது,

$$\mu P = \frac{\delta u}{\delta x} \qquad ...(1)$$

$$\mu Q = \frac{\delta u}{\delta y} \qquad ...(2)$$

$$\mu R = \frac{\delta u}{\delta z} \qquad ...(3)$$

என்பவை ஒருங்கே பொருந்த வேண்டும்; μ என்பது x, y, z-ல் அமைந்த ஒரு சார்பாகவோ அல்லது மாறிலியாகவோ இருக்கலாம்.

இந்த மூன்று கட்டுப்பாடுகளையும் ஒரே கட்டுப்பாடாகக் கொண்டு வரலாம். அது பின்வருமாறு :

(1)-க்கு y, z ஒட்டியும், (2)-க்கு z, x ஒட்டியும், (3)-க்கு x, y ஒட்டியும் பகுதி வகைக்கெழு கண்டால்,

$$P\frac{\delta \mu}{\delta y} + \mu\frac{\delta P}{\delta y} = \frac{\delta^2 u}{\delta x\ \delta y} = Q\frac{\delta \mu}{\delta x} + \mu\frac{\delta Q}{\delta x} \qquad ...(4)$$

$$Q\frac{\delta \mu}{\delta z} + \mu\frac{\delta Q}{\delta z} = \frac{\delta^2 u}{\delta y\ \delta z} = R\frac{\delta \mu}{\delta y} + \mu\frac{\delta R}{\delta y} \qquad ...(5)$$

$$R\frac{\delta \mu}{\delta x} + \mu\frac{\delta R}{\delta x} = \frac{\delta^2 u}{\delta z\ \delta x} = P\frac{\delta \mu}{\delta z} + \mu\frac{\delta P}{\delta z} \qquad ...(6)$$

என்பவை பெறப்படும். இவற்றினை ஒழுங்குபடுத்தி, பின்வருமாறு எழுதுவோம்.

$$\mu\left(\frac{\delta P}{\delta y} - \frac{\delta Q}{\delta x}\right) = Q\frac{\delta \mu}{\delta x} - P\frac{\delta \mu}{\delta y} \qquad ...(7)$$

$$\mu\left(\frac{\delta Q}{\delta z} - \frac{\delta R}{\delta y}\right) = R\frac{\delta \mu}{\delta y} - Q\frac{\delta \mu}{\delta z} \qquad ...(8)$$

$$\mu\left(\frac{\delta R}{\delta x}-\frac{\delta P}{\delta z}\right)=P\frac{\delta\mu}{\delta z}-R\frac{\delta\mu}{\delta x}\qquad\ldots(9)$$

(7), (8), (9)-களை முறையே R, P, Q ஆல் பெருக்கிக் கூட்டினால்,

$$P\left(\frac{\delta Q}{\delta z}-\frac{\delta R}{\delta y}\right)+Q\left(\frac{\delta R}{\delta x}-\frac{\delta P}{\delta z}\right)+R\left(\frac{\delta P}{\delta y}-\frac{\delta Q}{\delta x}\right)=0$$

என வரும். ... (10)

இதுவே $P\,dx+Q\,dy+R\,dz=0$ என்ற சமன்பாட்டிற்கு $u(x, y, z)=a$ என்ற ஒரு தீர்வு இருப்பதற்குத் தேவையான கட்டுப்பாடாகும்.

இதன் மறுதலையும் உண்மையாகும்.

மருதலைத் தேற்றம்

$P\,dx+Q\,dy+R\,dz=0$ என்ற சமன்பாட்டில் உள்ள P, Q, R என்ற மூன்றிற்குமிடையே (10)-ல் உள்ள தொடர்பு நிலவுமாயின் $P\,dx+Q\,dy+R\,dz=0$ என்ற சமன்பாட்டிற்கு ஒரு தீர்வு அல்லது தொகைத் தீர்வு உண்டு என்பதே மறுதலைத் தேற்றமாகும்.

எனவே $u=a$ என்ற தீர்வு இருக்க (10)-ல் பெறப்பட்ட கட்டுப்பாடு தேவையானதும் போதுமானதும் ஆகும்.

மறுதலையின் நிறுவன்முறை

முன்பு, 11·5-ல் $P\left(\frac{\delta Q}{\delta z}-\frac{\delta R}{\delta y}\right)+Q\left(\frac{\delta R}{\delta x}-\frac{\delta P}{\delta z}\right)$

$$+R\left(\frac{\delta P}{\delta y}-\frac{\delta Q}{\delta x}\right)=0\qquad\ldots(1)$$

என்ற கட்டுப்பாடு தேவையென நிறுவப்பட்டது.

இப்பொழுது $P\,dx+Q\,dy+R\,dz=0$ ...(2)

என்ற சமன்பாட்டில்,

P, Q, R என்பவற்றினிடையே மேலே (1) எனப்பட்ட கட்டுப்பாடு நிலவுமானால் சமன்பாட்டிற்குத் தீர்வு காண முடியுமென நிறுவுவோம். P, Q, R இடையே மேற்கூறிய கட்டுப்பாடு நிலவுமாயின், μP, μQ, μR என்பவற்றினிடையேயும் அக்கட்டுப்

பாடு நிலவும் என நாம் எளிதில் காட்டலாம். அதாவது $P_1=\mu P$, $Q_1=\mu Q$. $R_1=\mu R$ எனக் கொண்டு $\Sigma P_1\left(\frac{\delta Q_1}{\delta z}-\frac{\delta R_1}{\delta y}\right)=0$ என்பதும் பொருந்துமென நிறுவலாம். (இதைப் பயிற்சியாகக் கொண்டு சரி பார்க்கவும்.) ...(3)

முதலில் $P\,dx+Q\,dy$ என்ற பகுதியை எடுத்துக்கொள்வோம். $P\,dx+Q\,dy$ என்பது ஒரு பொருத்தமான வகை நுண்ணெண்ணுக (exact differential) இல்லையாயின் μ என்ற ஒரு தொகையீட்டுக் காரணி (integrating factor) காண முடியும். அப்பொழுது $\mu P\,dx+\mu Q\,dy$ என்பது ஒரு பொருத்தமான வகை நுண்ணெண்ணுகும். (அப்பொழுது $P\,dx+Q\,dy+R\,dz=0$ என்ற சமன்பாட்டிற்குப் பதிலாக, $\mu P\,dx+\mu Q\,dy+\mu R\,dz=0$ என்ற சமன்பாட்டை எடுத்துக்கொள்ள வேண்டியிருக்கும்.) ஆகவே நிறுவன் முறைக்குக் குறை ஏதுமின்றி $P\,dx+Q\,dy$ என்பதையே ஒரு பொருத்தமான வகை நுண்ணெண்ணுக எடுத்துக்கொள்வோம். அப்பொழுது $\frac{\delta P}{\delta y}=\frac{\delta Q}{\delta x}$ என்ற கட்டுப்பாடு உண்மையாகும் என நாம் அறிவோம். ...(4)

('வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகள்' – I காண்க.)

அப்பொழுது $V=\int(P\,dx+Q\,dy)$ என வரும்;

மேலும் $P=\frac{\delta V}{\delta x}$; $Q=\frac{\delta V}{\delta y}$ ...(5)

என்பதும் உண்மையாகும். Vஐ நாம் கண்டு கொள்ளலாம்.

மேலும் $\frac{\delta P}{\delta z}=\frac{\delta^2 V}{\delta z\,\delta x}$

$$\frac{\delta Q}{\delta z}=\frac{\delta^2 V}{\delta y\,\delta z}$$

எனவே (1)-ல் கொடுக்கப்பட்ட பொதுக் கட்டுப்பாட்டின்படி,

$$\frac{\delta V}{\delta x}\left(\frac{\delta^2 V}{\delta z\;\delta y}-\frac{\delta R}{\delta y}\right)+\frac{\delta V}{\delta y}\left(\frac{\delta R}{\delta x}-\frac{\delta^2 V}{\delta z\;\delta x}\right)=0$$

எனவாகும்.

[ஏனெனில் (1)-ல் கொண்ட கொள்கைப்படி, அதில் மூன்றுவது உறுப்பான $R\left(\frac{\delta P}{\delta y}-\frac{\delta Q}{\delta x}\right)$ என்பது தனியே பூச்சிய மாவதால்,]

[ஏனெனில் (4)-ன்படி $\frac{\delta P}{\delta y} = \frac{\delta Q}{\delta x}$]

இதை $\frac{\delta V}{\delta x} \cdot \frac{\delta}{\delta y}\left(\frac{\delta V}{\delta z} - R\right) - \frac{\delta V}{\delta y} \cdot \frac{\delta}{\delta x}\left(\frac{\delta V}{\delta z} - R\right) = 0$

என்று எழுதலாம்; அல்லது

$$\begin{vmatrix} \frac{\delta V}{\delta x} & \frac{\delta}{\delta x}\left(\frac{\delta V}{\delta z} - R\right) \\ \frac{\delta V}{\delta y} & \frac{\delta}{\delta y}\left(\frac{\delta V}{\delta z} - R\right) \end{vmatrix} = 0$$

என எழுதலாம்.

இந்தக் கட்டுப்பாடு கிடைக்கப் பெறுவதால், இவ்வாசிரிய ரால் எழுதப்பட்ட 'வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகள்'—I என்ற நூலில் 1·54-ல் விளக்கப்பட்டதையொட்டி, பின் கூறப்படும் முடிவு பொருந்துகிறது. அதாவது,

V-க்கும், $\frac{\delta V}{\delta z} - R$-க்கும். ஒரு தொடர்பு இருக்கிறது; ஆனல் அத்தொடர்பு x, y ஐச் சார்ந்ததல்லவெனத் தெரிகிறது.

எனவே $\left(\frac{\delta V}{\delta z} - R\right)$ என்ற கோவையை, z, V—இரண்டையும் சார்ந்த ஒரு சார்பாக எழுதலாம். அப்படியானல்

$$\frac{\delta V}{\delta z} - R = \varphi\ (z.\ V) \qquad \ldots\ (6)$$

எனக் கொள்வோம்; φ-ன் அமைப்பை நாம் கண்டு கொள்ள லாம். (த.கோ: 'வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகள்'—I, 1·54-காண்க.)

இப்பொழுது $P\,dx+Q\,dy+R\,dz = \frac{\delta V}{\delta x}dx+\frac{\delta V}{\delta y}dy+\frac{\delta V}{\delta z}dz$

$$+\left(R-\frac{\delta V}{\delta z}\right)dz \qquad \ldots \quad (7)$$

என்று நாம் எழுதலாம்; ஏனெனில், $P = \frac{\delta V}{\delta x}$, $Q = \frac{\delta V}{\delta y}$ என நாம் (5)-ல் கண்டோம்.

(6)-ன் உதவியால் $R-\frac{\delta V}{\delta z} = -\varphi\,(z, V)$ எனக் காண்கிறோம்.

எனவே $P\,dx+Q\,dy+R\,dz=0$ என்ற சமன்பாட்டை (7)-ன் உதவி கொண்டு, $dV-\varphi\,(z, V)\,dz=0$ என எழுதலாம்.

[$dV = \frac{\delta V}{\delta x}dx+\frac{\delta V}{\delta y}dy+\frac{\delta V}{\delta z}dz$ எனக் கொள்ளப்படுவது காண்க.]

இது ஒரு வகைக்கெழுச் சமன்பாடு; V, z என்ற இரு மாறிகள் கொண்டது; $\frac{dV}{dz}-\varphi(z, V) = 0$ என வரும்.

இச்சமன்பாட்டின் தீர்வு $F(V,z) = 0$ என வரும்.

எனவே $P\,dx+Q\,dy+R\,dz=0$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வை நாம் பெற முடியும்.

ஆகவே, $P\,dx+Q\,dy+R\,dz = 0$ என்ற சமன்பாட்டிற்கு ஒரு தீர்வு இருக்குமாயின் $P\left(\frac{\delta Q}{\delta z}-\frac{\delta R}{\delta y}\right)+Q\left(\frac{\delta R}{\delta x}-\frac{\delta P}{\delta z}\right)$

$$+R\left(\frac{\delta P}{\delta y}-\frac{\delta Q}{\delta x}\right) = 0$$

என்ற கட்டுப்பாடு தேவையானது, போதுமானது எனப் பெறுகிறோம்.

11-5·1 $P\,dx+Q\,dy+R\,dz = 0$ என்ற சமன்பாட்டிலுள்ள P, Q, R மூன்றும் $\Sigma P\left(\frac{\delta Q}{\delta z}-\frac{\delta R}{\delta y}\right) = 0$ என்ற கட்டுப்பாட்டுக்கடங்கு மாயின் அச்சமன்பாட்டின் தீர்வு (அல்லது) தொகைத் தீர்வு காணும் முறை

$P\,dx$ என்பது தீர்வில் x தொடர்புள்ள உறுப்புகளினின்று தான் வரமுடியும்; அவ்வாறே $Q\,dy$ என்பது தீர்வில் y தொடர்

புள்ள உறுப்புகளினின்றும், $R\ dy$ என்பது, தீர்வில் z தொடர் புள்ள உறுப்புகளினின்றும் தான் வரமுடியும்.

எனவே ஏதாமொரு மாறியை,—எடுத்துக் காட்டாக zஐ ஒரு மாறிலி எனக் கொண்டால் —, $dz=0$ எனவாகி, சமன்பாடு $P\ dx+Q\ dy=0$ எனக் குறுகி வரும். ...A.

இந்தச் சமன்பாட்டின் தீர்வு கண்டு, தொகை காணும் முறை யில் பெறப்படும் மாறிலியை $f(z)$ என ஒரு z சார்பாகக் கொள்க. இது ஒரு பொருத்தமான செயலேயாகும். ஏனெனில் (A)-ன் தீர்வாக வரும் தொகையில் வரும் மாறிலி x, yஐ மட்டுமே பொருத்த மாறிலியாகும். இப்படிக் காணப்பட்ட தொகைக்கு x,y,zஐ யொட்டி வகைக்கெழு காண்க. அப்படி வரும் தொடர்பை யும் $P\ dx+Q\ dy+R\ dz=0$ என்ற சமன்பாட்டையும் ஒப்பிட்டுப் பார்த்து $f(z)$ என நாம் வேண்டிய சார்பினைப் பெற முடியும்.

குறிப்பு 1 : $P\ dx+Q\ dy+R\ dz=0$ என்ற சமன்பாட்டில் P,Q,R என்பவை சமபடித்தானவையெனில் $x=zu$, $y=zv$ எனவும் ஈடு செய்து தொகை காணலாம்.

குறிப்பு 2 : zஐத் தான் மாறிலியாகக் கொள்ள வேண்டிய அவசியம் ஒன்றுமில்லை; xஐக் கொள்ளலாம், yஐயும் கொள்ள லாம். xஐ மாறிலியாகக் கொள்ளும் போது, $dx=0$ ஆகி,

$Q\ dy+R\ dz=0$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வுகண்டு, தொகைத் தீர்வில் தோன்றும் மாறிலியை $f(x)$ எனக்கொண்டு, மேலே கூறியபடி, $f(x)$ஐக் காண முடியலாம்.

அவ்வாறே yஐ மாறிலியாகக் கொள்ளும் போது $dy=0$ ஆகி, $P\ dx+R\ dz=0$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வு கண்டு, தொகைத் தீர்வில் தோன்றும் மாறிலியை $f(y)$ எனக்கொண்டு, மேலே கூறிய படி $f(y)$ஐக் காணலாம். எது வசதியோ, சுலபமோ, அதை கடைப்பிடிக்கலாம்.

குறிப்பு 3 : $P\ dx+Q\ dy+R\ dz+S\ ds+T\ dt+\ldots=0$ என, மூன்று மாறிகளுக்கு அதிகப்பட்ட மாறிகள் வந்தால், அது ஒரு சரியான வகையீட்டு நுண்பகுதியாகவிருக்க தேவையான, போது மான கட்டுப்பாடு, முன் கண்ட அமைப்பில், மூன்று, மூன்று மாறி களாக எடுத்துப் பெறப்படும். அதாவது P, Q, R, S உள்ளன வெனில் (P, Q, R), (P, Q, S), (P, R, S), (Q, R, S) என்ற மூன்று மூன்ருக எடுத்து முன் பெறப்பட்டபடி

$$\sum_{P}^{Q,R} P\left(\frac{\delta Q}{\delta z}-\frac{\delta R}{\delta y}\right)+\sum_{P}^{Q,S} P\left(\frac{\delta Q}{\delta s}-\frac{\delta S}{\delta y}\right)+ - \ldots \ldots = 0$$

என்ற அமைப்பில் வரும்.

11-5·2 எ.கா. 1

$(y+z)dx + (z+x)\, dy + (x+y)\, dz = 0$ ....(1)

என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வு காண்க. தொகைத் தீர்வுக்குரிய கட்டுப்பாடு இங்கு உண்மையாவது காண்க. $(y+z)\,(1-1)+(z+x)\,(1-1)+(z+x)\,(1-1)=0$

z ஒரு மாறிலி எனக் கொண்டு,

$(y+z)\,dx+(z+x)\,dy=0$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வு காணலாம். இதை

$y\,dx+x\,dy+z\,dx+z\,dy=0$ என எழுதலாம்.

z மாறிலியாகக் கொள்ளப்படுவதால் இதன் தீர்வு

$xy+zx+zy=f(z)$ என வரும். ...(2)

இப்பொழுது z என்பது ஒரு மாறியெனக் கொண்டு இதன் வகையீட்டு நுண்பகுதி காணின்

$x\,dy+y\,dx+z\,dx+x\,dz+z\,dy+y\,dz=f'(z)\,dz$ என வரும். ...(3)

அதாவது

$(y+z)\,dx+(z+x)\,dy+(x+y)\,dz=f'(z)\,dz$ என வரும். ...(4)

(1) எனக் கொடுத்த சமன்பாட்டையும் (4)ஐயும் ஒப்பிட்டுப் பார்க்கும்பொழுது $f'(z)\,dz=0$ என வருகிறது.

$\therefore f(z)=c$ என ஒரு மாறிலி வரும்.

இதை (2)-ல் ஈடு செய்தால் நமக்குக் கிடைக்கும் தீர்வு, $xy+yz+zx=c$ என்பதாகும்.

குறிப்பு 1 ஆனல் இந்தச் சமன்பாட்டைப் பொருத்த மட்டில் உறுப்புகளை வசதியாக அடுக்கியே தீர்வைக் காணலாம்.

அதாவது

$$y\,dx+x\,dy+z\,dx+x\,dz+y\,dz+z\,dy=0$$

$$\therefore\ d\,(xy)+d\,(zx)+d\,(yz)=0$$

$\therefore\ xy+yz+zx=c$ என்ற தீர்வு கிடைக்கும்.

எ-கா. 2

$z(x^2-yz-z^2)\,dx+xz\,(x+z)\,dy+x\,(z^2-x^2-xy)\,dy=0$ ...(1) என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வு காண்க.

தொகைத் தீர்வுக் கட்டுப்பாடு இங்கு உண்மையாகிறதா என முதலில் பார்ப்போம். கட்டுப்பாட்டுக்குரிய கோவை

$$= z(x^2-yz-z^2)\ [(x^2+2xz)+x^2]$$

$$+xz(x+z)[(z^2-3x^2-2xy)-(x^2-2yz-3z^2)]$$

$$+x(z^2-x^2-xy)\ [(-z^2)-(2xz+z^2)]$$

$$= z(x^2-yz-z^2)\ (2x^2+2xz)$$

$$+xz(x+z)\ (4z^2-4x^2-2xy+2yz)$$

$$+x(z^2-x^2-xy)\ (-2z^2-2xz)$$

$$= 0$$

ஆகவே இதன் தொகைத் தீர்வு காணலாம்.

இங்கு x மாறிலியெனக் கொண்டால்,

$xz(x+z)\,dy+x(z^2-x^2-xy)\,dz=0$ ஆகும்.

அல்லது $z\,(x+z)\,dy+(z^2-x^2-xy)\,dz=0$

அல்லது $x\,(z\,dy-y\,dz)+z^2\,dy+(z^2-x^2)dz=0$ ...(2)

என வரும்.

முழுவதும் z^2 ஆல் வகுத்தால்

$\dfrac{x(z\,dy-y\,dz)}{z^2}+dy+dz-\dfrac{x^2}{z^2}\,dz=0$ என வரும். இதை

$x\,d\left(\dfrac{y}{z}\right)+dy+dz+x^2d\left(\dfrac{1}{z}\right)=0$ என எழுதலாம்,

இதன் தீர்வு (x மாறிலி எனக் கொண்டு) யாதெனில்

$$x \frac{y}{z} + y + z + \frac{x^2}{z} = f(x) \qquad ...(3)$$

என வரும். அதாவது

$$xy + yz + z^2 + x^2 = z\, f(x) \qquad ...(4)$$

என வரும். (4)-ன் வகையீட்டு நுண்ணெண் காணில் (x மாறி யெனக் கொண்டு)

$$x\,dy + y\,dx + y\,dz + z\,dy + 2z\,dz + 2x\,dx$$
$$= f(x)\,dz + zf'(x)\,dx \qquad ...(5)$$

$$[y + 2x - z\,f'(x)]\;dx + (x+z)dy + [y + 2z - f(x)]dz = 0$$

என எழுதலாம். இதை xzஆல் பெருக்கினுல்

$$[x\,yz + 2x^2z - xz^2\,f'(x)]\;dx + xz(x+z)dy +$$
$$[x\,yz + 2xz^2 - xz\,f(x)]\;dz = 0 \qquad ...(6)$$

என வரும்.

கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடான (1)ஐயும் (6)ஐயும் ஒப்பிட்டால்,

$$x\,yz + 2x^2z - xz^2\,f'(x) = x^2z - yz^2 - z^3 \text{ எனவும்,} \qquad ...(7)$$

$$x\,yz + 2xz^2 - xz\,f(x) = xz^2 - x^3 - x^2y \qquad ...(8)$$

எனவும் வரும்.

$$(7)\text{-லிருந்து } f'(x) = \frac{x\,yz + x^2z + yz^2 + z^3}{xz^2} \qquad ...(9)$$

$$(8)\text{-லிருந்து } f(x) = \frac{xyz + xz^2 + x^3 + x^2y}{xz} \qquad ...(10)$$

$$\therefore \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{x\,yz + x^2z + yz^2 + z^3}{z(x\,yz + xz^2 + x^3 + x^2y)}$$

$$= \frac{xy + x^2 + yz + z^2}{x(yz + z^2 + x^2 + xy)} = \frac{1}{x}$$

$$\therefore \int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \int \frac{1}{x}\,dx$$

$\therefore \quad \log f(x) = \log x + c$

$\therefore \quad f(x) = cx$ என வரும்.

$\therefore$ இப்பொழுது (4) எனப் பெறப்பட்ட தீர்வை

$xy+yz+z^2+x^2=czx$

என்று முடிவாக எழுதலாம். (c — மட்டும் மாறிலி)

இதை $\dfrac{x+y}{z} + \dfrac{y+z}{x} = c$ எனவும் எழுதலாம்.

மாற்று முறை :

இதே சமன்பாட்டை z மாறிலியாகக் கொண்டு இதே தீர்வு பெறப்படுகிறதா எனப் பார்ப்போம். z மாறிலியெனக் கொள்ளப்பட்டால்,

$z(x^2-yz-z^2)\,dx+xz(x+z)\,dx=0$ என வரும்.

இதை $(x^2-yz-z^2)\,dx+x(x+z)\,dy=0$ என எழுதலாம்.

அதாவது

$x^2dx-z^2dx+z(x\,dy-y\,dx)+x^2dy=0$ என வரும்.

முழுவதும் x^2ஆல் வகுத்தால்

$$dx-z^2\,\frac{dx}{x^2}+z\,\frac{(x\,dy-y\,dx)}{x^2}+dy=0$$ என வரும்.

இதை $dx+z^2d\left(\dfrac{1}{x}\right)+zd\left(\dfrac{y}{x}\right)+dy=0$ என எழுதலாம்.

இதன் தீர்வை (z-மாறிலியெனக் கொண்டு)

$x+\dfrac{z^2}{x}+\dfrac{zy}{x}+y=f(z)$ என எழுதலாம்.

அதாவது $x^2+z^2+yz+xy=x\,f(z)$ என வரும். ...(11)

இதற்கு வகையீட்டு நுண்ணெண் காணில் (zஐ மாறியெனக் கொண்டு) $2x\,dx+2z\,dz+y\,dz+z\,dy+x\,dy+y\,dx=f(z)dx+xf'(z)dz$ என வரும்.

இதை

$$\Big[2x+y-f(z)\Big]dx+(z+x)dy+\Big[2z+y-xf'(z)\Big]dz=0$$

என எழுதலாம்.

xz ஆல் முழுவதும் பெருக்கினால்

$$xz\,[2x+y-f(z)]\,dx+xz\,(x+z)\,dy$$
$$+\ xz\,[2z+y-xf'(z)]\,dz=0 \quad ...(12)$$

என வரும்.

கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடு (1)ஐயும், (12)ஐயும் ஒப்பிட்டுப் பார்த்தால்,

$$2x^2z+x\,yz-xz\,f(z)=zx^2-yz^2-z^3 \quad ...(13)$$

$$2xz^2+x\,yz-x^2z\,f'(z)=xz^2-x^3-x^2y \quad ...(14)$$

என வரும்.

$$(13)\text{-லிருந்து}\ f(z)=\frac{x^2z+x\,yz+yz^2+z^3}{xz}$$
$$=\frac{x^2+xy+yz+z^2}{x}$$

$$(14)\text{-லிருந்து}\ f'(z)=\frac{xz^2+x\,yz+x^3+x^2y}{x^2z}$$
$$=\frac{z^2+yz+x^2+xy}{xz}$$

$$\therefore\ \frac{f'(z)}{f(z)}=\frac{1}{z}$$ என வரும்.

$$\therefore\ \int\frac{f'(z)}{f(z)}\,dz=\int\frac{dz}{z}$$

$$\log f(z)=\log\ cz$$

$f(z)=cz$ என்ற முடிவு வரும்.

இதை (11)-ல் ஈடு செய்ய, நாம் பெறும் தீர்வு,

$$x^2+z^2+yz+xy=c\ xz$$

அல்லது $\dfrac{x+y}{z}+\dfrac{y+z}{x}=c$ என்று நாம் முதலில் கண்ட தீர்வே பெறப்படுவது காண்க.

11-6. தொகைத் தீர்வு காண முடியாத தனி வகைக்கெழுச் சமன் பாடு

தொகைத் தீர்வுக்குரிய கட்டுப்பாடு நிலவாவிடத்து,
$P\,dx+Q\,dy+R\,dz=0$ ...(1)

என்ற சமன்பாட்டுக்கு $f(x, y, z)=c$ என்ற அமைப்பில் தீர்வு கிடைக்காது.

ஆனால் ஏதாவதொரு தொகைத் தீர்வு $\varphi(x, y, z)=a$ என்பதோடு தொடர்பு படுத்தினுல் (1) என்ற சமன்பாட்டுக்கு φஐச் சார்ந்துள்ள ஒரு தீர்வு கிடைக்கலாம். அதாவது,

$$P\,dx+Q\,dy+R\,dz=0 \qquad ...(1)$$

$$\frac{\delta\varphi}{\delta x}\,dx+\frac{\delta\varphi}{\delta y}\,dy+\frac{\delta\varphi}{\delta z}\,dz=0 \qquad ...(2)$$

என்ற இரு சமன்பாடுகளைக் கொண்டு முன்னர் 11·2-ல் (A) எனக் கண்ட இரண்டு ஒருங்கமைச் சமன்பாடுகள் தீர்ப்பதைப் போலவே (1), (2) இரண்டையும் தீர்க்கலாம். அதாவது

$$\frac{dx}{Q\frac{\delta\varphi}{\delta z}-R\frac{\delta\varphi}{\delta y}}=\frac{dy}{R\frac{\delta\varphi}{\delta x}-P\frac{\delta\varphi}{\delta z}}=\frac{dz}{P\frac{\delta\varphi}{\delta y}-Q\frac{\delta\varphi}{\delta x}}$$

என்ற சமன்பாடுகளுக்கு இரு தீர்வுகள் வரும். அதிலொன்று $\varphi(x, y, z)=a$ ஆக இருக்கும்; மற்றொன்று $F(x, y, z)=b$ என வரும். φ-ம், F-ம் சேர்ந்து (1), (2) என்ற இரு ஒருங்கமைச் சமன் பாடுகளின் தீர்வுகளாகும். φ என்ற சார்பை நமது தேவைக்கும் வசதிக்கும் ஏற்றவாறு எதுவாக வேண்டுமானுலும் எடுத்துக் கொள்ளலாம்.

மேற் கூறிய கருத்துக்கு வடிவ கணிதப் பொருள் என்னவெனப் பின்னர், 11·9-ல் கூறப்பட்டிருப்பது காண்க. இதை விளக்கும் வகையில் ஓர் எடுத்துக்காட்டுக் கணக்கும் அங்குச் செய்யப்பட்டிருக்கிறது.

11-7. வடிவ கணிதப் பொருள் (11·2 சமன்பாடுகள்)

$$\left.\begin{aligned}P_1\,dx+Q_1\,dy+R_1\,dz=0\\P_2\,dx+Q_2\,dy+R_2\,dz=0\end{aligned}\right\} \qquad ...(1)$$

என்ற ஒருங்கமைச் சமன்பாடுகளை எடுத்துக் கொள்வோம்,

இவற்றினை

$$\frac{dx}{Q_1R_2-Q_2R_1} = \frac{dy}{R_1P_2-R_2P_1} = \frac{dz}{P_1Q_2-P_2Q_1}$$

அல்லது

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R} \quad \ldots \quad (2)$$

என்ற வகையிலும் எழுதலாமென நாம் அறிவோம்.

இவற்றினுக்கு வடிவ கணித முறையில் என்ன பொருள் உளது என நாம் ஆராய்வோம். (1), அல்லது (2) என்ற சமன்பாடு களின் அடிப்படையில் (x, y, z) என்ற ஒவ்வொரு புள்ளிக்கும், திட்டமான $\frac{dz}{dx}$, $\frac{dy}{dx}$ மதிப்புகள் பெறக் கூடும்; அதாவது, இவ் வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகள் முப்பரிமாண வெளியில் (Three dimensional space) உள்ள ஒவ்வொரு புள்ளியிலும் ஒரு குறிப்பிட்ட திசையைக் காட்டி நிற்கின்றன. எனவே, ஒரு குறிப் பிட்ட நிலையில், ஒரு குறிப்பிட்ட புள்ளி, மேற் கூறப்பட்ட வகைக் கெழுச் சமன்பாடுகளை ஈடு செய்யும் முறையில் ஒரு குறிப்பிட்ட திசையில் நகருமாயின், அக் குறிப்பிட்ட புள்ளி, ஒவ்வொரு நிலை யிலும் ஓரோர் குறிப்பிட்ட திசையில் நகர்ந்து செல்லும். [ஆங்காங்கே, திசைக் கொசைன்கள்—(direction cosines) முறையே dx, dy, dz அல்லது P, Q, R என்பவற்றின் விகிதத்தில் இருக்கும்].

இப்பொழுது P என்ற புள்ளி, (x_0, y_0, z_0) என்ற ஓர் இடத்தி லிருந்து நகர்ந்து செல்ல ஆரம்பிக்கிறதெனக் கொள்வோம். அங்கு புறப்பட்டு $x_0+\triangle x$, $y_0+\triangle y$, $z_0+\triangle z$ என்ற இடத்திற்கு நகர்ந்து செல்லும் திசை மேற் கூறப்பட்ட சமன்பாடுகளுக்கிணங்க $P(x_0, y_0, z_0)$, $Q(x_0, y_0, z_0)$, $R(x_0, y_0, z_0)$ என்ற விகிதம் பெற்ற திசைக் கொசைன்கள் உள்ள திசையில் நகரும்; செல்லும் தூரம் மிக நுண்ணியதாகும். இவ்வாறே, அடுத்தடுத்து, ஒரு புள்ளியி லிருந்து, இணக்கமான திசைக் கொசைன்கள் பெற்ற திசையில், அடுத்த புள்ளி வழியாக நகர்ந்து செல்லுங்கால், முப்பரிமாண வெளியில் P என்ற புள்ளி ஒரு வளை கோட்டைத் (curve) தனது பாதையாகப் பெறும். ஒவ்வொரு புள்ளியிலும், அப்புள்ளிக் குகந்ததாய், வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகளுக்கும் இணைந்ததாய்

உள்ள திசை மாற்றம் ஏற்படும். எனவே (1) அல்லது (2) என்ற சமன்பாடுகள் முப்பரிமாண வெளியில் ஒரு வளை கோட்டைக் குறித்து நிற்கும்.

(x_0, y_0, z_0)-க்குப் பதிலாக முன் பெறப்பட்ட வளைகோட்டிலில்லாத (X_0, Y_0, Z_0) என்ற மற்றொரு புள்ளியில் ஆரம்பமானால், மற்றொரு வளைகோடு பெறப்படும். எனவே முப்பரிமாண வெளியில் ஒவ்வொரு புள்ளி வழியாகவும், கொடுக்கப்பட்ட வகைக் கெழுச் சமன்பாடுகளுக்கிணங்க ஓரோர் திட்டமான வளைகோடு பெறப்படும். இவ்வளைகோடுகள் எத்தன்மையன எனப் பார்ப்போம்.

(1) அல்லது (2) சமன்பாடுகளுக்கு $u(x, y, z) = a$; $v(x, y, z) = b$ என்ற இரு பரப்புகள் (surfaces) தீர்வாகப் பெறப்படுகின்றன. இவ்விரு பரப்புகளும் ஒன்றையொன்று வெட்டிக் கொள்ளும் வளைகோடுதான் நாம், P-என்ற புள்ளியில் ஆரம்பித்து முன்கூறிய முறைப்படி பெற்ற வளைகோடாகும். ஆனால் புள்ளியை மாற்றினால் வேறொரு வளைகோடு பெறப்படுமெனவும், ஒவ்வொரு புள்ளிக்கும் ஒவ்வொரு வளைகோடு பெறப்படுமெனவும் நாம் கூறினோம்.

இங்கு ஒன்று முக்கியமாகக் கவனிக்கத் தக்கது. a என்பது ஏதாமொரு மாறிலியாதலின் எண்ணற்ற (கந்தழி) மதிப்புகளை ஏற்கலாம்; அவ்வாறே b என்பதும். எனவே $u = a$ என்பது ஓர் எண்ணற்ற பரப்புக் குடும்பம்; $v = b$ என்பது மற்றோர் எண்ணற்ற பரப்புக் குடும்பம். a என்ற ஒரு குறிப்பிட்ட மதிப்புக்கு b எண்ணற்ற மதிப்புகளை ஏற்று, ஒரு கந்தழி எண்ணிக்கையான வளைகோடுகளை வெட்டுக் கோடுகளாகத் தரும். ஆனால் a என்பதே எண்ணற்ற மதிப்புகளை ஏற்கலாமாதலின், நாம் வெட்டுக் கோடுகளாகப் பெறக்கூடிய வளைகோடுகளின் எண்ணிக்கை $(\infty \times \infty)$ இரு கந்தழியாகும். (**double infinity in number**)

மேற்கூறப்பட்ட வடிவ கணிதப் பொருளை ஓர் எடுத்துக் காட்டு கொண்டு பார்ப்போம்.

11-7·1. முன்பு 11-3·1-ல் செய்து காட்டப்பட்ட முறைப்படி

$$\frac{a\,dx}{(b-c)\,yz} = \frac{b\,dy}{(c-a)zx} = \frac{c\,dz}{(a-b)xy}$$

என்ற சமன்பாடுகளுக்கு

$$ax^2+by^2+cz^2=A \quad ...(1)$$

$$a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2=B \quad ...(2)$$

என்ற இரு தீர்வுகள் பெற்றோம்.

(1) என்பது ஓர் இருபடிப் பரப்பின் சமன்பாடு. (equation to a quadric surface)

A என்ற 'ஏதாமொரு' மாறிலியின் பல்வேறு மதிப்புகளுக்கு (1) என்பது ஓர் எண்ணற்ற (கந்தழி) இருபடிப் பரப்புக் குடும்பத்தைத் தரும்.

(2) என்பது ஒரு கன நீள் வளையப் பரப்பின் சமன்பாடு. (equation to an (ellipsoidal surface).

B-என்ற 'ஏதாமொரு' மாறிலியின் பல்வேறு மதிப்புகளுக்கு (2) என்பது ஓர் எண்ணற்ற (கந்தழி) கனநீள் வளையக் குடும்பத்தைத் தரும்.

இவ்விரு பரப்புக் குடும்பங்களும் வெட்டிக் கொள்ளக் கூடிய 'இரு கந்தழி' எண்ணிக்கையுள்ள வளைகோடுகளே, கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடுகளுக்கு இணையான வளைகோடுகளாகும்.

11-7·11. முன்பு பயிற்சி 11·2-ல் 7-வது கணக்கில் கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடுகளின் தீர்வுகள்

$$y=Az \quad ...(1)$$

$$x^2+y^2+z^2=By \quad ...(2)$$

எனப் பெறப்படும்.

$y=Az$ என்பது ஒரு 'தளக் குடும்பம்' (family of planes)

$x^2+y^2+z^2=Bz$ என்பது ஒரு 'கோளக் குடும்பம்' (family of spheres).

எனவே இச்சமன்பாடுகளுக்குரிய இரு கந்தழி வளைகோடுகள், ஒரு 'தளக் குடும்பம்', ஒரு 'கோளக் குடும்பத்'தை வெட்டும் வளைகோடுகளாகும். இங்கு $A=1$, $B=2$ எனக் கொண்டு, இம் மதிப்புகளுக்கு என்ன வடிவ கணிதப் பொருளெனப் பார்ப்போம்.

$y=z$ என்ற தளமும்,

$x^2+y^2+z^2-2z=0$

அல்லது $x^2+y^2+(z-1)^2=1$ என்ற கோளமும் கிடைக்கும்.

இவ்விரண்டும் வெட்டும் வளைகோடு, எடுத்துக்கொள்ளப் பட்ட சமன்பாடுகளுக்கு இணைந்த வளைகோடாகும்.

இவ்விரண்டும் $(0, 1, 1)$ என்ற புள்ளி வழியாகச் செல்கின்றன என நமக்குத் தெரிகிறது. எனவே 11·7-ல் கூறப்பட்ட P என்ற புள்ளியை $(0, 1, 1)$ என எடுத்துக் கொண்டால் $y=z$ என்ற தளமும், $x^2+y^2+(z-1)^2=1$ என்ற கோளமும் வெட்டும் வளை கோடு, இதற்குரிய வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகளுக்குரிய ஒரு வளை கோடாகும்.

இவ்வாருக A-ன் எண்ணற்ற மதிப்புகளுக்கும், B-ன் எண்ணற்ற மதிப்புகளுக்கும் $(\infty\times\infty)$ இரு கந்தழி எண்ணிக்கை யுள்ள வளைகோடுகள் பெறப்படும் என்பதைக் கண்டறிக.

11·8 வடிவ கணிதப் பொருள் (11·5 சமன்பாடு)

$P\,dx+Q\,dy+R\,dz=0$...(1) என்ற சமன்பாடு 11·5-ல் நிறுவப் பட்ட கட்டுப்பாட்டுக்குட்பட்டதெனக் கொண்டு, அதற்கு $F(x, y, z)=c$...(2) என்ற ஒரு தீர்வு இருக்கிறதெனக் கொண்டு, அதன் வடிவ கணிதப் பொருளை ஆராய்வோம்.

(2) என்ற சமன்பாடு—[அதாவது (1)-ன் தீர்வாகப் பெற்ற தொடர்பு] ஓர் 'ஏதாமொரு' மாறிலியான c-ஐப் பெற்றிருப் பதால், ஒரு கந்தழி (a single infinity) எண்ணிக்கையுள்ள பரப்புக் குடும்பத்தைக் குறித்து நிற்கும். ஒரு குறிப்பிட்ட புள்ளி $P(x_0, y_0, z_0)$ வழியாக அப்பரப்பு செல்லுமாயின் அதற்குரிய ஒரு c மதிப்பு இருக்கும்; அந்த cஐப் பெறலாம்; அது c_0 எனக் கொள்வோம். எனவே $F(x, y, z)=c_0$ என்பது $P(x_0, y_0, z_0)$ என்ற புள்ளி வழியாகச் செல்லும் ஒரு பரப்பு; அது (1)—என்ற சமன்பாட்டிற்குரிய ஒரு பரப்பாகும்.

$F(x, y, z)=c_0$ என்ற பரப்பின்மேல் ஒரு புள்ளியை எடுத்துக் கொள்வோம். அப்புள்ளி அப்பரப்பின்மேல் எந்தவொரு திசை யில் நகர்ந்து சென்றாலும், அப்புள்ளியின் ஆயத் தொலைகளும் (co-ordinates), எந்த ஒரு நிலையிலும் அப்புள்ளி நகரும் திசையின் திசைக் கொசைன்களுக்கு நேர்த் தகவுப் பொருத்தம் பெற்றிருக்

கும் dx, dy, dz என்பவையும், (1) என்ற சமன்பாட்டிற்கு இணங்கி யிருக்கும்; ஏனெனில் (1)-ன் தீர்வு (2) ஆவதால் இந்த இணக்கம் இருக்கும்.

மேலும் (x, y, z) என்ற ஒவ்வொரு புள்ளிக்கும் (1)-க்குப் பொருத்தமாக $\frac{dx}{dz}$, $\frac{dy}{dz}$ என்பவற்றின் மதிப்புகள் எண்ணற்ற வையாகும் (கந்தழி). எனவே (1)-க்குப் பொருத்தமாக, ஆயத் தொலைகளையும் திசைக் கொசைன்களும் பெற்ற ஒரு புள்ளி எந்தத் திசையிலும் போகலாம். (ஒரு கந்தழி எண்ணிக்கை), ஆனால் $F(x, y, z)=c_0$ என்ற பரப்பின் மேல்தான் அது செல்லும். (x, y, z) என்ற புள்ளியின் பாதை அப்பரப்பின் மேல்தானிருக்கும். எனவே அப்புள்ளி வழியாக அப்பரப்பின் மேல் வரையக்கூடிய எந்த வளைகோடும் பொருந்தும்.

இங்கு விளக்கப்பட்ட வளைகோடுகளுக்கும் முன்னர் 11·7-ல் விளக்கப்பட்ட வரைகோடுகளுக்கும் உள்ள வேறுபாடுகளைக் காணவேண்டும். இரு சமன்பாடுகளின் அடிப்படையில் ஒரு புள்ளி வழியாக ஒரே ஒரு வளைகோடுதான் உண்டு ; இங்கு ஒரே ஒரு சமன்பாட்டின் அடிப்படையில் ஒரு புள்ளி வழியாகப் பல வளை கோடுகள் (எண்ணற்றவை) உண்டு; ஆனால் அவை யாவும் சமன்பாட்டின் தீர்வாகப் பெறப்படும் பரப்பின்மேல் மட்டுமே இருக்கும்.

11-8·1 : எடுத்துக்காட்டாக 11·7·11-ல்

$$y=Az$$

$x^2+y^2+z^2=Bz$ என்ற இரு தீர்வுகள் பெற்றோம். $x=1$, $y=2$, $z=3$ என்ற புள்ளியை எடுத்துக் கொள்வோம்.

$$3y=2z$$

$$3(x^2+y^2+z^2)=14z$$

என்ற 'தளமும்'. 'கோளமும்', $(1, 2, 3)$ வழியாகச் செல் பவை; இவை $A=\frac{2}{3}$, $B=\frac{14}{3}$ என்ற மாறிலி மதிப்புகளுக் குரியவையாகும். எனவே, $(1, 2, 3)$ வழியாக, இவ்விரு சமன் பாடுகளுக்கும் உரிய வளைகோடு (அதாவது $\frac{dx}{x^2-y^2-z^2}=\frac{dy}{2xy}=\frac{dz}{2xz}$ என்ற சமன்பாடுகளுக்கும் உரிய வளை கோடு)

$$x^2+y^2+z^2-\frac{14}{3}z=0$$
$$3y-2z=0$$

என்ற 'கோள-தள' வெட்டுக் கோடாகும். இது ஒன்றே ஒன்றுதான்.

ஆனல் 11·52-ல் எடுத்துக்கொண்ட சமன்பாட்டுக்குரிய வளைகோடு [அதாவது $(y+z)\,dx+(z+x)\,dy+(x+y)\,dz=0$ என்ற சமன்பாட்டிற்குரிய வளைகோடு] $(1, 2, 3)$ என்ற புள்ளி வழியாக $xy+yz+zx=11$ என்ற பரப்பின்மேல் வரையக்கூடிய எந்த ஒரு வளைகோடாகவும் இருக்கக்கூடும் ; இவை எண்ணற்றவையாகும்.

11-8·2. $P\,dx+Q\,dy+R\,dz=0$ என்ற சமன்பாட்டிற்குரிய இயங்கு பாதைகளும், $\frac{dx}{P}=\frac{dy}{Q}=\frac{dz}{R}$ என்ற சமன்பாடுகளுக்குரிய இயங்கு பாதைகளும், ஒன்றையொன்று செங்கோணச் சாய்வில் வெட்டிக்கொள்ளும் என்பதை இப்பொழுது நிறுவ முற்படுவோம். இதுவும் முன்கூறிய வடிவ கணிதப் பொருள்களோடு தொடர்புடையது.

முப்பரிமாண வடிவ கணித முறைப்படி பார்த்தால்

$$P\,dx+Q\,dy+R\,dz=0 \qquad ...(1)$$

என்ற சமன்பாட்டின் பொருள் யாதெனின் dx, dy, dz என்பவற்றிற்குத் தகவுப் பொருத்தமுடைய திசைக் கொசைன்கள் பெற்ற ஒரு நேர் கோடும் P, Q, R (அல்லது அவற்றிற்கு நேர்த் தகவுப் பொருத்தமுடைய மதிப்புகள்) என்ற திசைக் கொசைன்கள் பெற்ற ஒரு நேர்கோடும் ஒன்றுக்கொன்று செங்கோணச் சாய்வில் இருக்கும்.* எனவே (1) என்ற கட்டுப்பாட்டில் நகரும் ஒரு புள்ளி (x, y, z), P, Q, R என்ற மதிப்புகளின் நேர் விகிதத்திலுள்ள திசைக் கொசைன்கள் பெற்ற திசையில் உள்ள ஒரு நேர் கோட்டிற்குச் செங்கோணச் சாய்வில் நகரும்.

* **குறிப்பு :** மரபுப்படி, $ll'+mm'+nn'=0$ என்ற கட்டுப்பாட்டில் (l, m, n) என்ற திசைக் கொசைன்கள் பெற்ற நேர்கோடும் (l', m', n') என்ற திசைக் கொசைன்கள் பெற்ற நேர்கோடும் செங்கோணச் சாய்வில் இருக்கும் என்பது தேற்றம் [C. Smith—முப்பரிமாண வடிவ கணிதம், 24-ம் பத்தி காண்க.]

ஆனல்,

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R} \quad ...(2)$$

என்ற சமன்பாடுகளின் படி,

dx, dy, dz—அளவுள்ள (அல்லது அவற்றிற்கு நேர் விகிதத்திலுள்ள) திசைக் கொசைன்கள் பெற்ற திசையில் இருக்கும் ஒரு நேர்கோடு P, Q, R திசைக் கொசைன்கள் பெற்ற நேர்கோட்டிற்கு இணை கோடாக (Parallel) இருக்கும். எனவே (2) என்ற கட்டுப்பாட்டில் ஒரு புள்ளி நகருமாயின், அது P, Q, R திசைக் கொசைன்கள் பெற்ற கோட்டிற்கு இணையான திசையில் நகரும். எனவே (1) என்ற கட்டுப்பாட்டில் நகரும் புள்ளியின் இயங்கு வழிகளான வளைகோடுகள், (2) என்ற கட்டுப்பாட்டில் நகரும் புள்ளியின் இயங்கு வழிகளான வளை கோடுகளோடு செங்குத்துச் சாய்வில் இருக்கும்.

முதற் கூறப்பட்ட வளைகோடுகள் (1)—என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வாகப் பெறப்படும் பரப்பின் மேலேயிருக்கும்; எனவே (2) என்ற சமன்பாடுகளைக் குறிக்கும் வளைகோடுகள் (1) என்ற சமன்பாட்டின் பரப்புகளுக்குச் செங்குத்தான சாய்விலிருக்கும்.

(1) என்ற சமன்பாட்டிற்கு நாம் தீர்வு காணமுடியாது போனல் $\left[\text{அதாவது } \Sigma P\left(\frac{\delta Q}{\delta z} - \frac{\delta R}{\delta y}\right) \neq 0 \text{ என்ற நிலை ஏற்படுங் காலை}\right]$, (2) என்ற சமன்பாடுகளுக்குரிய வளை கோடுகளுக்குச் செங்குத்துச் சாய்வில் பரப்புகள் எவையுமிரா. இதுவரை நாம் கண்ட முடிவுகள் பின்னர் $Pp+Qq=R$ என்ற பகுதி வகைக்கெழுச் சமன்பாடு பற்றி நாம் ஆராயும்பொழுது பயன்படும்.

11-9. வடிவ கணிதப் பொருள் *(11·6ஐச் சார்ந்தது)*

$$P\,dx+Q\,dy+R\,dz=0 \quad ...(1)$$

என்ற சமன்பாட்டோடு,

$$\frac{\delta\varphi}{\delta x}\,dx + \frac{\delta\varphi}{\delta y}\,dy + \frac{\delta\varphi}{\delta z}\,dz = 0 \quad ...(2)$$

என்ற சமன்பாட்டையும் இணைத்து,

11-6.-ல் $F(x, y, z)=b$ என்ற தீர்வும் ...(3)

$\varphi(x, y, z)=a$ என்ற தீர்வும் பெறப்பட்டன. ...(4)

முன்னர் 11-7-ல் (1), (2) என்ற சமன்பாடுகளின் தீர்வாக, (3) என்ற பரப்பும், (4) என்ற பரப்பும் வெட்டும் வளைகோடுகள் பெறப்படும் என்பதும் முன்னர் விளக்கப்பட்டுள்ளது. (எண்ணிக்கை $\infty\times\infty$). எனவே, (4) என்ற பரப்பின்மேல் $P\,dx+Q\,dy+R\,dz=0$ என்ற சமன்பாட்டிற்கிணைந்த வளைகோடுகளை நாம் பெறுகிறோம்.

(4)-க்குப் பதிலாக $\phi(x, y, z,)=a$ என ஏற்பின் (2) என்ற சமன்பாடு $\frac{\delta\phi}{\delta x}dx+\frac{\delta\phi}{\delta y}dy+\frac{\delta\phi}{\delta z}dz=0$ என மாறும்.

அப்பொழுது $F_1(x, y, z)=c_1$ என்ற தீர்வும்,

$\phi(x, y, z)=a$ என்ற தீர்வும்

வரும். $\phi(x, y, z)=a$ என்ற பரப்பின்மேல் $P\,dx+Q\,dy+R\,dz=0$ என்ற சமன்பாட்டிற்கிணைந்த வளைகோடுகள், $F_1(x, y, z)=c_1$ என்ற பரப்பும், $\phi(x, y, z)=a$ என்ற பரப்பும் வெட்டிக் கொள்ளும் வளைகோடுகளாகும்.

11-9·1. எ.கா: $y\,dx+x\,dy-(x+y+2z)\,dz=0$ என்ற சமன்பாட்டிற்குத் தீர்வு காண முடியுமா எனக் காண்க.

$$P\left(\frac{\delta Q}{\delta z}-\frac{\delta R}{\delta y}\right)+Q\left(\frac{\delta R}{\delta x}-\frac{\delta P}{\delta z}\right)+R\left(\frac{\delta P}{\delta y}-\frac{\delta Q}{\delta x}\right)$$

$$=y\,(0-1)+x\,(-1-0)-(x+y+2z)\,(1-1)$$

$$=-y-x\neq 0;$$

எனவே இதன் தீர்வு காண முடியாது.

(i) இப்பொழுது $z=a$ என்ற ஒரு தொடர்பு கொண்டு முதல் சமன்பாட்டிற்குத் தீர்வு காண்போம்.

$y\,dx+x\,dy-(x+y+2z)\,dz=0$ ...(1)

$z=a$ என்பதற்குப் பொருத்தமாக $dz=0$ ...(2)

$\therefore$ (1), (2) என்ற இரு சமன்பாடுகளின் தீர்வுகள்

$\dfrac{dx}{x} = \dfrac{dy}{-y} = \dfrac{dz}{0}$ என்ற சமன்பாடுகளிலிருந்து பெறப்படும்.

அவை $xy=c$

$z=a$ (என நாம் ஏற்றுக் கொண்ட தொடர்பு)

$xy=c$ என்பது முப்பரிமாண வெளியில் ஓர் அதிபர வளைய உருளைக் குடும்பம் ; $z=a$ என்பது xoy என்ற தளத்திற்கு இணையான ஒரு தளம்.

$xy=c$ என்ற அதிபர வளைய உருளைப் பரப்புகள் $z=a$ என்ற தளத்தால் வெட்டப்படும் பொழுது, பெறப்படும் வளைகோடுகள் $z=a$ என்ற தளத்தில் பெறப்படும் ஒரு கந்தழி எண்ணிக்கையுள்ள அதிபர வளையங்கள். இவ்வதிபர வளையங்கள்தாம்,

$y\,dx+x\,dy-(x+y+2z)\,dz=0$ என்ற சமன்பாட்டிற்கு $z=a$ என்பதற்கியைந்த தீர்வுகளாகும்.

(ii) அடுத்தபடியாக,

$z=a$ என்பதற்குப் பதிலாக $x+y+2z=0$ என்ற தொடர்பை உதவியாகக் கொண்டு $y\,dx+x\,dy-(x+y+2z)\,dz=0$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வு காண்போம்.

$$y\,dx+x\,dy-(x+y+2z)\,dz=0 \qquad \text{...(1)}$$

$x+y+2z=0$ என்பதற்குப் பொருத்தமாக

$$dx+dy+2dz=0 \qquad \text{...(3)}$$

என்ற சமன்பாடுகளின் தீர்வுகள்,

$$\frac{dx}{2x+x+y+2z} + \frac{dy}{-x-y-2z-2y} + \frac{dz}{y-x} \qquad \text{...(4)}$$

என்ற சமன்பாடுகளிலிருந்து பெறப்படும்.

அதாவது,

$$\frac{dx}{3x+y+2z} = \frac{dy}{-x-3y-2z} = \frac{dz}{y-x}$$

என்ற சமன்பாடுகளிலிருந்து பெறப்படும் ; இவை ஒவ்வொன்றும்

$$\frac{dx+dy+2dz}{3x+y+2z-x-3y-2z+2y-2x}$$

$$=\frac{dx+dy+2dz}{0}$$ -க்குச் சமம்.

எனவே $x+y+2z=c$ ($c=$ பூச்சியம் உட்பட) ஒரு தீர்வாகப் பெறப்படுகிறது.

மேலும், மேற் கூறப்பட்ட (4) என்ற சமன்பாடுகள் ஒவ் வொன்றும் $\frac{y\ dx+x\ dy}{3xy+y^2+2yz-x^2-3xy-2xz}=\frac{dz}{y-x}$ -க்குச் சமம்.

$$\therefore \quad \frac{y\ dx+x\ dy}{(y-x)\ (x+y+2z)}=\frac{dz}{y-x}$$

$$\therefore \quad \frac{y\ dx+x\ dy}{(x+y+2z)}=dz$$

$x+y+2z=0$ ஆன படியால்

$$y\ dx+xdy=0$$

எனவே $xy=c$ என்ற தீர்வு கிடைக்கிறது. $xy=c$ என்பது முன் கூறியபடி ஓர் அதிபர வளைய உருளைக் குடும்பம்; $x+y+2z=0$ என்ற தளம் இந்த உருளைப் பரப்புகளை வெட்டும் வளை கோடுகள்தாம்,

$$y\ dx+x\ dy-(x+y+2z)\ dz=0$$

என்ற சமன்பாட்டிற்கு, $x+y+2z=0$ என்பதற்கியைந்த தீர்வு களாகும்.

குறிப்பு: $y\ dx+x\ dy-(x+y+2z)\ dz=0$ என்ற சமன் பாட்டை,

$z=a$ என்ற தொடர்போடு தீர்க்க, மேலே கூறிய வழி ஒரு சுற்று வழி. நேரடியாக $z=a$, எனவே $dz=0$; எனவே $y\ dx+x\ dy=0$ என எழுதி, $xy=c$ என்ற தீர்வைக் கண்டு பிடித் திருக்கலாம். அவ்வாறே $x+y+2z=0$ என்ற தொடர்போடு தீர்க்க, நேரடியாக $x+y+2z=0$ என ஈடு செய்து, $y\ dx+x\ dy=0$ எனக் கண்டு, $xy=c$ என்ற தீர்வைக் கண்டு பிடித்திருக்கலாம்.

இருந்த போதிலும் 11·6-ல் கூறிய சுற்று வழியாக முறைப் படி செய்து, $z=a$ என்ற தீர்வு முதல் நிலையிலும், $x+y+2z=0$

என்ற தீர்வு இரண்டாவது நிலையிலும் இரண்டில் ஒரு தீர்வாகப் பெறப்படுகிறது என்பதைக் காட்டுவதற்காகவே, இச்சுற்றுவழி கையாளப்பட்டது. ஆனால் $z=a$ எனவோ அல்லது $x+y+2z=a$ எனவோ முதலிலேயே பயன்படுத்தி $xy=c$ என்ற தீர்வை, சற்று முன் காட்டியபடியே பெறலாம்; தவறேதுமில்லை.

பயிற்சி 11·3

பின்வரும் சமன்பாடுகள் தொகைக் காணக்கூடிய தனிச் சமன்பாடுகளா என அறிந்து, அப்படியாயின் தொகை காண்க.

(1) $(y+3z)\ dx+(x+2z)\ dy+(3x+2y)\ dz=0$

(2) $(x+z)^2dy+y^2dx+y^2dz=0$

(3) $yz\ dx-2zx\ dy+xy\ dz=0$

(4) $x\ dx+y\ dy+z\ (x^2+y^2+z^2+1)\ dz=0$

(5) $2(y+z)\ dx-(x+z)\ dy+(2y-x+z)\ dz=0$

(6) $yzdx+(xz-yz^3)\ dy-2xy\ dz=0$

(7) $(2x^3y+1)\ dx+x^4dy+x^2\tan z\ dz=0$

(8) $yz\ dx-z^2dy-xy\ dz=0$

(9) $(y^2+z^2+2xy+2xz)dx+(x^2+z^2+2xy+2yz)dy$
$+(x^2+y^2+2xz+2yz)\ dz=0$

(10) $(e^xy+e^z)\ dx+(e^yz+e^x)\ dy+(e^y-e^xy-e^yz)dz=0$

(11) $2x\ (y+z)+(2yz+y^2-x^2-z^2)\ dy+(2yz+z^2-x^2$
$-y^2)dz=0$

(12) $(y^2+yz+z^2)\ dx+(x^2+xz+z^2)\ dy+(x^2+x\ y+y^2)\ dz$
$=0$

(13) $(2x+y^2+2xz)\ dx+2xy\ dy+x^2dz=du$

(14) $z\ (y+z)\ dx+z(u-x)\ dy+y\ (x-u)\ dz+y\ (y+z)\ du=0$

(15) பின்வரும் சமன்பாடுகளுக்கு ஆங்காங்கே எதிர்ப்புறத்தில் குறிப்பிட்ட தொடர்புகளோடு இணைத்து, தீர்வுகள் காண்க; வடிவ கணிதப் பொருளையும் குறிப்பிடுக.

சமன்பாடு : துணைத் தொடர்பு :

(i) $x\,dx+y\,dy+c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\,dz=0$ — $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$

(ii) $y\,dx+x\,dy-(x+y+2z)\,dz=0$ — (a) $x+y=0.$ (b) $xy=a.$

(iii) $2z\,dx+dy+y\,dz=0$ — $x+y+z=0.$

விடை 11·3

(1) $xy+2yz+3zx=c$

(2) $y(x+z)=c(x+y+z)$

(3) $y^2=c\;xz$

(4) $(x^2+y^2+z^2)\,e^{z^2}=c$

(5) $y+z=c^2(x+z)^2$

(6) $2xy=z^2(y^2+c)$

(7) $x^2y-\frac{1}{x}+\log\sec z=c$

(8) $y=c\,e^{x/z}$

(9) $x(y^2+z^2)+y(z^2+x^2)+z(x^2+y^2)=c$

(10) $ye^x+ze^y+xe^z=ce^z$

(11) $x^2+y^2+z^2=c\,(y+z)$

(12) $xy+yz+zx=c\,(x+y+z)$

(13) $x^2+xy^2-u+x^2z=c$

(14) $(y+z)\ (u+c)\ +z\ (x-u)=0$

தீர்வு	வடிவ கணிதப் பொருள்
(15) (i) $x^2+y^2+z^2=c^2$	$x^2+y^2+z^2=c^2$ என்ற கோளப் பரப்பும், $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ என்ற பரப்பும் வெட்டும் வளைகோடு.
(ii) (a) $x^2+z^2=b^2$	$x^2+z^2=b^2$ என்ற பரப்பும் $x+y=0$ என்ற தளமும் வெட்டிக் கொள்ளும் வளைகோடு.
(b) $x+y+2z=0$ அல்லது $z=c$	$x+y+2z=0$ என்ற தளமும் $xy=a$ என்ற அதிபர வளைய உருளைப் பரப்பும் வெட்டிக் கொள்ளும் வளைகோடு. $z=c$ என்ற தளமும் $xy=a$ என்ற அதிபர வளைய உருளைப் பரப்பும் வெட்டிக் கொள்ளும் வளைகோடு.
(iii) $(x-z+2)^2=b\ (2z-1)$	$(x-z+2)^2=b\ (2z-1)$ என்ற இருபடிப் பரப்பும், $x+y+z=0$ என்ற தளமும் வெட்டிக் கொள்ளும் வளைகோடு.

12. பகுதி வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகள்
(Partial Differential Equations)

A

12-0. வரையறை : இரண்டு அல்லது இரண்டிற்கு மேற்பட்ட பகுதி வகைக்கெழுக்கள் தோன்றும் சமன்பாடுகள் பகுதி வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகள் எனப்படும். எனவே இவ்விதச் சமன்பாடுகளில் குறைந்த பட்சம் இரண்டு சார்பில் மாறிகள் தொடர்பு பெற்றிருக்கும்.

12-1 : x, y என்ற இரண்டு சார்பிலா மாறிகளோடு, z என்ற சார்புடை மாறி தொடர்பு பெற்றிருக்கும் சார்புகள் பற்றியும், சமன்பாடுகள் பற்றியும் நாம் இந்தப் பகுதியில் காண விருக்கிறோம்.

ஒரு பகுதி வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டில் தோன்றும் பகுதி வகைக்கெழுவின் மீப்பெரு வரிசையே, அச் சமன்பாட்டின் வரிசை எனப்படும்.

மரபுப்படி,

$$\frac{\delta z}{\delta x} = p \; ; \; \frac{\delta z}{\delta y} = q \; ; \; \frac{\delta^2 z}{\delta x^2} = r \; ; \; \frac{\delta^2 z}{\delta x \, \delta y} = s \; ;$$

$\dfrac{\delta^2 z}{\delta y^2} = t$ என்ற குறியீடுகள் முறையாகப் பின்னர் பயன்படுத்தப்படும். இரண்டு எடுத்துக் காட்டுகள் கீழே கொடுக்கப்பட்டிருக்கின்றன,

$$\text{அமைப்பு (1) : } x\frac{\delta z}{\delta x}+y\frac{\delta z}{\delta y}=z$$

$$\text{அல்லது } xp+yq=z$$

இது முதல் வரிசைப் பகுதி வகைக்கெழுச் சமன்பாடு.

$$\text{அமைப்பு (2) : } \frac{\delta^2 z}{\delta x^2}+2\frac{\delta^2 z}{\delta x\delta y}+\frac{\delta^2 z}{\delta y^2}=0.$$

$$\text{அல்லது } r+2s+t=0$$

இது இரண்டாவது வரிசைப் பகுதி வகைக்கெழுச் சமன்பாடு.

12-2 : இப்பகுதியில் z என்ற சார்புடை மாறியோடு x, y என்ற இரு சார்பிலா மாறிகள் தொடர்பு பெற்ற முதல் வரிசை வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகள் சில குறிப்பிட்ட அமைப்பிலிருப்பின் அவற்றின் தீர்வைக் காணும் சில எளிய முறைகளைப் பார்ப்போம்.

12-2·1 : அதற்கு முன்பு, எப்படி பகுதி வகைக்கெழுச் சமன் பாடுகள் பிறக்கின்றன என்பதைப் பார்க்கலாம். பொதுவாக, பகுதி வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகள் இரு வகைகளில் பிறக்கும். (1) x, y, z என்பனவற்றைத் தொடர்பு படுத்தும் சார்பிலிருந்து மாறிலிகளை நீக்கிப் பெறப்படுபவை (eliminating constants); (2) தம்மிச்சையான சார்புகளை விலக்கிப் பெறப்படுபவை (eliminating arbitrary functions).

12-2·2. எ. கா. :

$$\varphi(x, y, z, a, b)=0 \quad \ldots(1)$$

என்ற சார்பினை எடுத்துக் கொள்வோம். இச் சார்பு வழியாக, z என்ற சார்புடை மாறி, x, y என்ற இரு சார்பில் மாறிகளைச் சார்ந்ததாய்க் கொடுக்கப்பட்டிருக்கிறது, a, b என்பவை மாறிலி கள். (1)-க்கு x, y ஒட்டிய பகுதி வகைக்கெழுக் கண்டால்,

$$\frac{\delta\varphi}{\delta x}+\frac{\delta\varphi}{\delta z}\quad\frac{\delta z}{\delta x}=0=\frac{\delta\varphi}{\delta x}+p\,\frac{\delta\varphi}{\delta z} \quad \ldots(2)$$

$$\frac{\delta\varphi}{\delta y}+\frac{\delta\varphi}{\delta z}\quad\frac{\delta z}{\delta y}=0=\frac{\delta\varphi}{\delta y}+q\,\frac{\delta\varphi}{\delta z} \quad \ldots(3)$$

(1), (2), (3) என்ற மூன்று சமன்பாடுகளின் உதவி கொண்டு, a, b என்ற மாறிகளை நீக்கினல்,

$$f(x, y, z, p, q)=0 \qquad \ldots(4)$$

என்ற ஒரு சமன்பாடு கிடைக்கும்.

எனவே, (1)-லிருந்து a, b என்ற மாறிலிகளை நீக்கி, $f(x, y, z, p, q)=0$ என்ற பகுதி வகைக்கெழுச் சமன்பாடு பெறப் படுகிறது.

12-2·21. எ.கா. 1 :

$z=(x^2+a)\ (y^2+b)$ என்ற சார்பிலிருந்து a, b நீக்கிய பகுதி வகைக்கெழுச் சமன்பாடு காண்க.

முதலில் xஐ ஒட்டி, பின்னர், yஐ ஒட்டிப் பகுதி வகைக்கெழு காணின்,

$$p = \frac{\delta z}{\delta x} = 2x\ (y^2+b)$$

$$q = \frac{\delta z}{\delta y} = 2y\ (x^2+a)$$

எனவே கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டோடு, பின்னர் பெறப் பட்ட சமன்பாடுகளைக் கொண்டு, a, bஐ விலக்கினல்,

$z = \frac{1}{2y}\ \frac{\delta z}{\delta y} \cdot \frac{1}{2x}\ \frac{\delta z}{\delta x}$ என வரும். அதாவது $pq=4\ xyz$

என்ற பகுதி வகைக்கெழுச் சமன்பாடு வரும்.

எ. கா. 2 :

$$z=\varphi\ (x+y) \qquad \ldots(1)$$

என்ற ஏதாவதொரு சார்பிலிருந்து, சார்பை விலக்கிப் பெறும் சமன்பாட்டைப் பார்ப்போம்.

(1)-க்கு x, y ஒட்டிய பகுதி வகைக்கெழு காணின்,

$$p = \frac{\delta z}{\delta x} = \varphi'\ (x+y)$$

$$q = \frac{\delta z}{\delta y} = \varphi'\ (x+y)$$

$\therefore\ p=q$ என்பதே $z=\varphi\ (x+y)$ என்பதற்குரிய சார்பு களைந்த பகுதி வகைக்கெழுச் சமன்பாடாகும்.

இதன் பொதுவான முறை பின்னர் விரிவாக விளக்கப்படும். மற்றும் சில எடுத்துக்காட்டுகள் கொண்டும் முதல் முறையை விளக்குவோம்.

எ. கா. 3 :

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ என்ற தொடர்பிலிருந்து a, b, cஐ நீக்கிய பகுதி வகைக்கெழுச் சமன்பாடு காண்க.

இங்கு மூன்று மாறிலிகள் நீக்க நான்கு சமன்பாடுகள் வேண்டும். x, y ஐ யொட்டி, பகுதி வகைக்கெழுக்கள் கண்டால் இரண்டு சமன்பாடுகள்தாம் வரும். இன்னுமொரு சமன்பாடு தேவைப்படுமாதலால், இரண்டாம் வரிசைப் பகுதி வகைக் கெழுவும் காண வேண்டிவரும்.

குறிப்பு : பொதுவாக n மாறிலிகள் தோன்றினால், அவற்றினை நீக்க, கொடுக்கப்பட்ட தொடர்போடு மேலும் n சமன் பாடுகள் தேவைப்படுமாதலால், n வரிசை வரை பகுதி வகைக் கெழுக்கள் காண வேண்டிவரும் ; இறுதியாகப் பெறப்படும் பகுதி வகைக்கெழுச் சமன்பாடு ஒரு n-வரிசைச் சமன்பாடாக வரும்.

$$(1) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

x ஒட்டிய, y ஒட்டிய பகுதி வகைக்கெழுச் சமன்பாடு (முதல் வரிசை)

$$(2) \quad \frac{2x}{a^2} + \frac{2z}{c^2} \frac{\delta z}{\delta x} = 0,$$

$$(3) \quad \frac{2y}{b^2} + \frac{2z}{c^2} \frac{\delta z}{\delta y} = 0,$$

(2)-க்கு அல்லது (3)-க்கு மறுபடியும் x ஒட்டியோ அல்லது y ஒட்டியோ வகைக்கெழு காணலாம். நாம் பின்னர் (2)-க்கு x ஒட்டிய பகுதி வகைக்கெழு/(3)-க்கு y ஒட்டிய பகுதி வகைக் கெழு காண்கிறோம்.

$$(4) \quad \frac{2}{a^2} + \frac{2z}{c^2} \frac{\delta^2 z}{\delta x^2} + \frac{2}{c^2} \left(\frac{\delta z}{\delta x}\right)^2 = 0 \text{ என்று}$$

அல்லது

$$(5) \quad \frac{2}{b^2} + \frac{2z}{c^2}\frac{\delta^2 z}{\delta y^2} + \frac{2}{c^2}\left(\frac{\delta z}{\delta y}\right)^2 = 0$$ என்று வரும்.

(1), (2), (3), (4) கொண்டு a, b, c ஐ நீக்கி விடுவோம். அவற்றினைப் பின்வருமாறு எழுதி, அணி கோவையியல்படி நீக்குறு (Eliminant) காண்போம்.

பொதுவாக '2' இருப்பின் அதை விலக்கி விடலாம்.

$$(1) \quad x^2 \frac{1}{a^2} + y^2 \frac{1}{b^2} + z^2 \frac{1}{c^2} - 1 = 0$$

$$(2) \quad x.\frac{1}{a^2} + 0 + z\frac{1}{c^2}p + 0 = 0$$

$$(3) \quad 0 + y.\frac{1}{b^2} + z.\frac{1}{c^2}q + 0 = 0$$

$$(4) \quad \frac{1}{a^2} + 0 + \frac{1}{c^2}\left\{ z\frac{\delta^2 z}{\delta x^2} + \left(\frac{\delta z}{\delta x}\right)^2 \right\} + 0 = 0$$

(4) ஐ $\frac{1}{a^2} + 0 + \frac{1}{c^2}(zr + p^2) + 0 = 0$ எனவும் எழுதலாம். அணி கோவை முறைப்படி நீக்குறுவாவது,

$$\begin{vmatrix} x^2 & y^2 & z^2 & -1 \\ x & 0 & zp & 0 \\ 0 & y & zq & 0 \\ 1 & 0 & zr+p^2 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

அதாவது

$$\begin{vmatrix} x & 0 & zp \\ 0 & y & zq \\ 1 & 0 & zr+p^2 \end{vmatrix} = 0$$

அதாவது $x\,(yzr+yp^2)-0+zp\,(0-y)=0$

அதாவது $xy\,zr+x\,yp^2-p\,yz+0$ என்பதே நாம் வேண்டிய பகுதி வகைக்கெழுச் சமன்பாடு (இரண்டாம் வரிசை). இதில் பொதுக் காரணியான y ஐ நீக்கலாம்.

எனவே

$$xz \frac{\delta^2 z}{\delta x^2} + x\left(\frac{\delta z}{\delta x}\right)^2 - z\frac{\delta z}{\delta x} = 0 \qquad ...(5)$$

என்பதே பகுதி வகைக்கெழுச் சமன்பாடாகும். அல்லாது (1), (2), (3), (5) கொண்டு a, b, c ஐ விலக்கியிருந்தால்,

$$yz \frac{\delta^2 z}{\delta y^2} + y\left(\frac{\delta z}{\delta y}\right)^2 - z\left(\frac{\delta z}{\delta y}\right) = 0 \qquad ...(6)$$

என்ற சமன்பாடு கிடைத்திருக்கும். $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ என்பதற்கு (5) அல்லது (6)—உரிய பகுதி வகைக்கெழுச் சமன்பாடு ஆகும்.

அதாவது $x\ zr + xp^2 - zp = 0$ ...(7)

அல்லது $y\ zt + yq^2 - zq = 0$ ...(8)

என்ற இரண்டும், $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ என்பதற்குப் பொருத்தமான பகுதி வகைக்கெழுச் சமன்பாடாகும். எனவே, (7) அல்லது (8) என்ற சமன்பாட்டிற்கு $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ என்பது ஒரு தீர்வாகும்.

குறிப்பு : இவையல்லாது (2)-க்கு y ஒட்டிய பகுதி வகைக் கெழு கண்டோ, (3)-க்கு x ஒட்டிய பகுதி வகைக்கெழு கண்டோ இவற்றுள் ஏதேனும் ஒன்றோடு (1), (2), (3) என்ற மூன்று சமன் பாடுகளையும் கொண்டு a^2, b^2, c^2 நீக்கி; மற்றோர் அமைப்பில் பகுதி வகைக்கெழு காணலாம். அது $pq + zs = 0$ என்ற அமைப்பில் வருகிறதெனச் செய்து பார்க்கவும்.

12-3. முன்பு 12·22 (2)-ல் ஓர் எடுத்துக்காட்டால் ஒரு தன்னிச்சையான சார்பை விலக்கி, பகுதி வகைக்கெழுச் சமன்பாடு அமைப்பதை விளக்கினோம். இப்பொழுது அதன் அடிப்படையை ஆராய்வோம். u, v என்பவை x, y, z ஆல் அமைந்த சார்புகள். $\varphi(u, v) = 0$ என்பது u, v ஐச் சார்ந்த—அதன் காரணமாக x, y, z ஐச் சார்ந்த—ஒரு தன்னிச்சையான சார்பு; இதை $u = f(v)$ அல்லது $v = F(u)$ எனவும் எழுதக் கூடும்.

இப்பொழுது $\varphi(u, v) = 0$ என்ற சார்பில் φஐ அகற்றி x, y, zஆல் ஆகிய ஒரு பகுதி வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டை அமைக்கும்

விதத்தைப் பார்ப்போம். இச் சமன்பாடு p, q ஐச் சார்ந்ததாய், ஓர் ஒருபடி, முதல் வரிசைச் சமன்பாடாய் அமைவதைக் காண லாம்.

$$\varphi\,(u, v) = 0 \qquad \ldots(1)$$

என்ற சமன்பாட்டின் இரு பக்கங்களுக்கும் முதலில் x ஒட்டியும் பிறகு y ஒட்டியும் பகுதி வகைக்கெழு காண்போம்.

$$\frac{\delta\varphi}{\delta u}\left(\frac{\delta u}{\delta x} + p\,\frac{\delta u}{\delta z}\right) + \frac{\delta\varphi}{\delta v}\left(\frac{\delta v}{\delta x} + p\,\frac{\delta v}{\delta z}\right) = 0 \qquad \ldots(2)$$

$$\frac{\delta\varphi}{\delta y}\left(\frac{\delta u}{\delta y} + q\,\frac{\delta u}{\delta z}\right) + \frac{\delta\varphi}{\delta v}\left(\frac{\delta v}{\delta y} + q\,\frac{\delta v}{\delta z}\right) = 0 \qquad \ldots(3)$$

இவ்விரு சமன்பாடுகளிலிருந்தும் $\frac{\delta\varphi}{\delta u}$, $\frac{\delta\varphi}{\delta v}$ ஐ விலக்கினுல்

$$\frac{\dfrac{\delta u}{\delta x} + p\,\dfrac{\delta u}{\delta z}}{\dfrac{\delta u}{\delta y} + q\,\dfrac{\delta u}{\delta z}} = \frac{\dfrac{\delta v}{\delta x} + p\,\dfrac{\delta v}{\delta z}}{\dfrac{\delta v}{\delta y} + q\,\dfrac{\delta v}{\delta z}}$$ என வரும்.

இதைக் குறுக்குப் பெருக்கல் செய்து எழுதினுல்,

$$\left(\frac{\delta u}{\delta x} + p\,\frac{\delta u}{\delta z}\right)\left(\frac{\delta v}{\delta y} + q\,\frac{\delta v}{\delta z}\right) = \left(\frac{\delta u}{\delta y} + q\,\frac{\delta u}{\delta z}\right)\left(\frac{\delta v}{\delta x} + p\,\frac{\delta v}{\delta z}\right)$$

என வரும்.

அதாவது $Pp+Qq=R$ $\qquad\ldots(4)$

என்ற அமைப்பில் வரும்.

$$P = \frac{\delta u}{\delta y}\;\frac{\delta v}{\delta z} - \frac{\delta u}{\delta z}\;\frac{\delta v}{\delta y}$$

$$Q = \frac{\delta u}{\delta z}\;\frac{\delta v}{\delta x} - \frac{\delta u}{\delta x}\;\frac{\delta v}{\delta z}$$

$$R = \frac{\delta u}{\delta x}\;\frac{\delta v}{\delta y} - \frac{\delta u}{\delta y}\;\frac{\delta v}{\delta x}$$

என்பவை (4)—ல் தோன்றும் P, Q, R—ன் மதிப்புகளாகும்.

எனவே (1) எனக் கொண்ட $\varphi(u, v)=0$ என்ற சமன்பாட்டி லிருந்து, (4) எனப்படும் $Pp+Qq=R$ என்ற முதல் வரிசை ஒருபடி பகுதி வகைக்கெழுச் சமன்பாடு வருவது காண்க.

12-3·1 எ. கா. 1 :

$z=F(x^2+y^2)$ என்ற சமன்பாட்டிலிருந்து, F நீக்கப்பட்ட பகுதி வகைக்கெழுச் சமன்பாடு பெறுக.

x ஒட்டி, பின்னர் y ஒட்டி பகுதி வகைக்கெழு கண்டால்,

$$p = \frac{\delta z}{\delta x} = F'(x^2+y^2) \,.\, 2x$$

$$q = \frac{\delta z}{\delta y} = F'(x^2+y^2) \,.\, 2y$$

$\therefore \dfrac{p}{q} = \dfrac{x}{y}$ என்ற பகுதி வகைக்கெழுச் சமன்பாடு வருவது காண்க.

இந்த $py=qx$ என்ற சமன்பாடு $z=F(x^2+y^2)$ என்ற எந்த F-க்கும் பொருந்துவதை ஓரிரண்டு எடுத்துக்காட்டுகளால் பார்ப்போம்.

முதலில் $z = \sin(x^2+y^2)$ எனக் கொள்வோம்.

$$p = \frac{\delta z}{\delta x} = \cos(x^2+y^2) \,.\, 2x$$

$$q = \frac{\delta z}{\delta y} = \cos(x^2+y^2) \,.\, 2y$$

$\therefore py=qx$ என வருவது காண்க.

இரண்டாவது $z=\tan^{-1}(\sqrt{x^2+y^2})$ எனக் கொள்வோம்.

இங்கும் $py=qx$ என வருமெனக் காணலாம்.

எ.கா. 2 :

$z=y^2+f\left(\frac{1}{x}+\log y\right)$ என்ற சமன்பாட்டினின்று f விலக்கி, பகுதி வகைக்கெழுச் சமன்பாடு காண்க.

முதலில் $p = \frac{\delta z}{\delta x} = f'\left(\frac{1}{x} + \log y\right) \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)$ ...(1)

$$q = \frac{\delta z}{\delta y} = 2y + f'\left(\frac{1}{x} + \log y\right) \cdot \left(\frac{1}{y}\right) \quad ...(2)$$

எனத் தொடர்புகள் வரும்.

(1) —லிருந்து $f'\left(\frac{1}{x} + \log y\right) = -x^2 p$ எனக் கண்டு,

(2) —ல் ஈடு செய்தால் $q = 2y - \frac{x^2 p}{y}$

அல்லது $qy + px^2 = 2y^2$ என்ற சமன்பாடு

$Pp + Qq = R$ என்ற அமைப்பில் வருவது காண்க.

எ. கா. 3 :

$z = f(x+ay) + \varphi(ay-x)$ என்ற சமன்பாட்டிலிருந்து f, φ என்ற இரு சார்புகளையும் நீக்கி, பகுதி வகைக்கெழுச் சமன்பாடு காண்க.

இங்கு இரண்டு 'தன்னிச்சையான' சார்புகள் வருவது காண்க.

x, y ஒட்டி, பகுதி வகைக்கெழு காண,

$$p = \frac{\delta z}{\delta x} = f'(x+ay) - \varphi'(ay-x)$$

$$q = \frac{\delta z}{\delta y} = af'(x+ay) + a\varphi'(ay-x)$$

இங்கு மறுபடியும் x, y ஒட்டிய பகுதி வகைக்கெழு காண,

$$r = \frac{\delta^2 z}{\delta x^2} = f''(x+ay) + \varphi''(ay-x)$$

$$t = \frac{\delta^2 z}{\delta y^2} = a^2 f''(x+ay) + a^2 \varphi''(ay-x)$$

$t = a^2 r$ அதாவது $\frac{\delta^2 z}{\delta y^2} = a^2 \frac{\delta^2 z}{\delta x^2}$

என்ற இரண்டாம் வரிசைச் சமன்பாடு வருகிறது.

எ. கா. 4 :

$\varphi\,(x+y+z,\ x^2+y^2-z^2) = 0$ என்ற சமன்பாட்டுக்குரிய φ நீங்கிய பகுதி வகைக்கெழுச் சமன்பாடு பெறுக.

இங்கு $u = x+y+z$,

$v = x^2+y^2-z^2$ எனக் கொள்ளல் வேண்டும்.

எனவே,

$$\frac{\delta u}{\delta x} = 1 = \frac{\delta u}{\delta y} = \frac{\delta u}{\delta z}$$

$$\frac{\delta v}{\delta x} = 2x\ ;\ \frac{\delta v}{\delta y} = 2y\ ;\ \frac{\delta v}{\delta z} = -2z$$ எனப் பெறுகிறோம்.

φ-க்கு x, y ஒட்டி, பகுதி வகைக்கெழு காண்போம்.

$$\frac{\delta\varphi}{\delta u}\left(\frac{\delta u}{\delta x} + p\,\frac{\delta u}{\delta z}\right) + \frac{\delta\varphi}{\delta v}\left(\frac{\delta v}{\delta x} + p\,\frac{\delta v}{\delta z}\right) = 0$$

$$\frac{\delta\varphi}{\delta u}\left(\frac{\delta u}{\delta y} + q\,\frac{\delta u}{\delta z}\right) + \frac{\delta\varphi}{\delta v}\left(\frac{\delta v}{\delta y} + q\,\frac{\delta v}{\delta z}\right) = 0$$

அதாவது

$$\frac{\delta\varphi}{\delta u}\,(1+p) + \frac{\delta\varphi}{\delta v}\,(2x-2pz) = 0$$

$$\frac{\delta\varphi}{\delta u}\,(1+q) + \frac{\delta\varphi}{\delta v}\,(2y-2qz) = 0$$ என வரும்.

இங்கு $\dfrac{\delta\varphi}{\delta u}$, $\dfrac{\delta\varphi}{\delta v}$ இரண்டையும் நீக்கினல்,

$$\frac{1+p}{1+q} = \frac{2\,(pz-x)}{2\,(qz-y)}$$ என வரும்.

இதைச் சுருக்கி எழுதினல்,

$p\,(y+z) - q\,(z+x) = x-y$ என்ற பகுதி வகைக்கெழுச் சமன் பாடு கிடைக்கும்.

பயிற்சி 12·1

பின்வரும் தொடர்புகளுக்குரிய பகுதி வகைக்கெழுச் சமன் பாடுகள் காண்க.

(1) $z = a(x+y)+b$

(2) $z = (x-a)^2+(y-b)^2$

(3) $z = axy+b$

(4) $z = ax+a^2y^2+b$

(5) $z = (x+a)(y+b)$

(6) $z = xy+y\sqrt{x^2-a^2}+b$

(7) $z = ax\,e^y+\frac{1}{2}a^2 e^{2y}+b$

(8) $xyz = \varphi(x+y+z)$

(9) $z = f(x)+e^y F(x)$

(10) $z = (x+y)\,\varphi(x^2-y^2)$

(11) $z = f(z)+F(y)$

(12) $z = ax^2+f(y)$

(13) $z=ax+by+f(a, b)$ என்ற தொடர்பின், a, b இரண் டையும் விலக்கி வரும் பகுதி வகைக்கெழுச் சமன் பாடு $z=px+qy+f(p,q)$ என நிறுவுக. (இது விரிவாக்கப்பட்ட கிளேராட் அமைப்பு என்பது காண்க.)

(14) $x=y$ என்ற தளத்தில் மையங்கொண்டு, r ஆரம்பெற்ற கோளக் குடும்பத்தின் பகுதி வகைக்கெழுச் சமன்பாடு $(x-y)^2(p^2+q^2+1) = r^2(p-q)^2$ என நிறுவுக.

(15) $p(\alpha, \beta, \gamma)$ என்ற புள்ளியில் உச்சியுடைய கூம்பின் சமன்பாடு $\varphi\left(\frac{x-\alpha}{z-\gamma}, \frac{y-\beta}{z-\gamma}\right) = 0$ என்பதாகும்.

இதன் பகுதி வகைக்கெழுச் சமன்பாடு $p(x-\alpha)+q(y-\beta)=(z-\gamma)$ என நிறுவுக.

(16) $z=ax^3+by^3$ என்ற தொடர்பும், $z=ax^3+bx^2y+cxy^2+\frac{dy^4}{x}$ என்ற தொடர்பும் ஒரே பகுதி வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டைப் பிறப்பிக்குமென நிறுவுக.

(17) r ஆரம் கொண்டு, XOY என்ற தளத்தின்மேல் மையங் கொண்ட கோளக் குடும்பத்தின் பகுதி வகைக்கெழுச் சமன்பாடு, $z^2(p^2+q^2+1)=r^2$ என நிறுவுக.

[குறிப்பு : $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+z^2=r^2$ என்ற தொடர்பில் α, βஐ நீக்குக.]

(18) $\frac{x}{a}+\frac{y}{a}+\frac{z}{b}=1$ என்ற சமன்பாடு கொண்டு x, y அச்சுகளில் சமவெட்டுத் துண்டுகள் விட்டுச் செல்லும் தளக் குடும்பத்தின் பகுதி வகைக்கெழுச் சமன்பாடு காண்க.

(19) $z=f(\sqrt{x^2+y^2})$ அல்லது $z=F(x^2+y^2)$ என்ற தொடர்பு, z அச்சை மையங்கொண்டு பெறப்படும் சுற்று வட்டப் பரப்புகளாகும். அவற்றின் பகுதி வகைக்கெழுச் சமன்பாடு $py=qx$ என நிறுவுக.

20. $z=f(y+mx)+F(y+nx)$ என்ற சமன்பாட்டில் f, F விலக்கிய பகுதி வகைக்கெழுச் சமன்பாடு $r-(m+n)s+mnt=0$ என நிறுவுக.

விடை 12·1

(1) $p=q$

(2) $4z=p^2+q^2$

(3) $xp=yq$

(4) $q=2p^2y$

(5) $z=pq$

(6) $pq=xp+yq$

(7) $q=xp+p^2$

(8) $x(y-z)p+y(z-x)q=z(x-y)$

(9) $t=q$

(10) $z=py+qx$

(11) $ps-qr=0$

(12) $p=xr$ அல்லது $s=0$

(13) $p=q$

B

12·4 : பகுதி வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டுத் தீர்வுகள்: முழுத் தீர்வு, சிறப்புத் தீர்வு (Solution of a partial differential equation—Complete and particular integral)

முன் 12·22-ல்

$$\varphi\,(x, y, z, a, b) = 0 \qquad \ldots(1)$$

என்ற தொடர்பிலிருந்து,

$$f\,(x, y, z, p, q) = 0 \qquad \ldots(2)$$

என்ற பகுதி வகைக்கெழுச் சமன்பாடு அமைக்கலாம் எனப் பார்த்தோம்.

இப்பொழுது, பின்னர் விளக்கப்படவிருக்கும் ஏதாவது ஒரு வழிப்படி, $f\,(x, y, z, p, q) = 0$ என்ற சமன்பாட்டிற்கு $\varphi\,(x, y, z, a, b) = 0$ என ஒரு தொகைத் தீர்வு கண்டு விட்டதாக வைத்துக் கொள்வோம். தொகைத் தீர்வில், a, b என எவையேனுமிரு மாறிலிகள் உள்ளன. இப்பொழுது $f\,(x, y, z, p, q) = 0$ என்ற சமன்பாட்டில் x, y என இரு மாறிலிகள் உள்ளள. இச்சமன் பாட்டின் தீர்வாக $\varphi\,(x, y, z, a, b) = 0$ என இரண்டு மாறிலிகள் a, b உள்ள ஒரு தீர்வு பெற்றால் φ என்பது அச்சமன்பாட்டின் முழுத் தீர்வு (complete integral) எனப்படும்.

a, b என்ற 'எவையேனுமிரு' மாறிலிகளுக்குக் குறிப்பிட்ட மதிப்புகள் நாம் கொடுப்போமானால் அது ஒரு சிறப்புத் தொகைத் தீர்வு (particular integral) எனப்படும்.

எ.கா. : $p = q$ என்ற சமன்பாட்டிற்கு

$z = a\,(x+y)+b$ என்பது முழுத் தீர்வு.

$z = 3\,(x+y)+4$ என்பது ஒரு சிறப்புத் தீர்வு.

12·4·1 : தனிச் சிறப்புத் தீர்வு (Singular integral)

a, b என்பவை மாறிலிகள் என ஏற்கப்பட்டு (1) என்ற தொடர்பிலிருந்து (2) என்ற சமன்பாடு பெற்றோம். ஆனால் a, b இரண்டும் x, y சார்ந்த சார்புகளெனவும் கொள்ளலாம். இப்பொழுது p, q-ன் மதிப்புகள் மாறு வண்ணம் a, b என்ற சார்புகளை நாம் தேர்ந்தெடுக்க முடியுமாயின் அவற்றினை (அதாவது a, b-ஐ நீக்கிப் பெறப்படும் வகைக்கெழுச் சமன்பாடும், (2) என்ற அமைப்

பிலேதானிருக்கும்; ஏனெனில் 'நீக்கல்' செய்யும்பொழுது 'நீக்குறு' எனப் பெறப்படுவது, a, b என்பவற்றின் மதிப்புகளையொட்டிப் பெறப் படுவதல்ல ; அவற்றின் அமைப்புகளை யொட்டித்தான் பெறப்படு கிறது. எனவே நாம் புதிதாக இப்பொழுது ஏற்றுக் கொண்டபடி a, b என்பவை x, y ஒட்டிய சார்புகள் என நாம் எடுத்துக் கொண்டால்,

$\varphi\ (x, y, z, a, b) = 0$-விருந்து

$$\frac{\delta \varphi}{\delta x} + \frac{\delta \varphi}{\delta z} p + \frac{\delta \varphi}{\delta a}\ \frac{\delta a}{\delta x} + \frac{\delta \varphi}{\delta b} \cdot \frac{\delta b}{\delta x} = 0$$

எனவும்,

$$\frac{\delta \varphi}{\delta y} + \frac{\delta \varphi}{\delta z} q + \frac{\delta \varphi}{\delta a}\ \frac{\delta a}{\delta y} + \frac{\delta \varphi}{\delta b}\ \frac{\delta b}{\delta y} = 0$$

எனவும் பெறலாம். ஆனால் p, q முன் பெற்ற மதிப்புகளையே மாறாமல் பெற்றிருக்க வேண்டுமெனின்,

$$\frac{\delta \varphi}{\delta a}\ \frac{\delta a}{\delta x} + \frac{\delta \varphi}{\delta b}\ \frac{\delta b}{\delta x} = 0 \qquad \ldots(3)$$

$$\frac{\delta \varphi}{\delta a}\ \frac{\delta a}{\delta y} + \frac{\delta \varphi}{\delta b}\ \frac{\delta b}{\delta y} = 0 \qquad \ldots(4)$$

என்ற இரண்டும் ஒருங்கே பொருந்த வேண்டும். இப்பொழுது

$$R = \begin{vmatrix} \frac{\delta a}{\delta x} & \frac{\delta b}{\delta x} \\ \frac{\delta a}{\delta y} & \frac{\delta b}{\delta y} \end{vmatrix}$$

என்ற அணி கோவையை எடுத்துக் கொள்வோம்.

(3) ஐ $\frac{\delta b}{\delta y}$ ஆல் பெருக்கி, அதிலிருந்து (4)ஐ $\frac{\delta b}{\delta x}$ ஆல் பெருக் கிக் கழித்தல்,

$$\frac{\delta \varphi}{\delta a}\ \frac{\delta a}{\delta x}\ \frac{\delta b}{\delta y} - \frac{\delta \varphi}{\delta a}\ \frac{\delta a}{\delta y}\ \frac{\delta b}{\delta x} = 0 \qquad \ldots(5)$$

என வரும்.

மேலும் (4)ஐ $\frac{\delta a}{\delta x}$ ஆல் பெருக்கி, அதிலிருந்து (3) ஐ $\frac{\delta a}{\delta y}$ ஆல் பெருக்கிக் கழித்தால்,

$$\frac{\delta \varphi}{\delta b} \; \frac{\delta b}{\delta y} \; \frac{\delta a}{\delta x} - \frac{\delta \varphi}{\delta b} \; \frac{\delta b}{\delta x} \; \frac{\delta a}{\delta y} = 0 \qquad \ldots(6)$$

என வரும்.

$$(5)\text{ஐ}, \; R \frac{\delta \varphi}{\delta a} = 0 \text{ எனவும்}, \qquad \ldots(7)$$

$$(6)\text{ஐ}. \; R \frac{\delta \varphi}{\delta b} = 0 \text{ எனவும்} \qquad \ldots(8)$$

எழுதலாம் என்பதை கவனித்தறியலாம்.

எனவே (3)–ம், (4)-ம், (7), (8)-க்கு ஏற்ப அமையும் சமன் பாடுகளாகும்.

$$R \neq 0 \text{ ஆனுல் } \frac{\delta \varphi}{\delta a} = 0 ; \frac{\delta \varphi}{\delta b} = 0 \qquad \ldots(9)$$

என்ற கட்டுப்பாடுகள் வரும். (9)-லிருந்து a, b என்பவை x, y சார்ந்த சார்புகளாகவோ மாறிலிகளாகவோ பெறப்படும்.

இவ்வாறு பெறப்படும் a, b-ன் மதிப்புகளை (1) என்ற சமன் பாட்டில் ஈடு செய்தால், (2) என்ற சமன்பாட்டிற்கு (1) என்ற தொடர்பு ஒரு தீர்வாக இருக்கவேண்டுமென்பது புலனுகிறது. அதாவது இந்தத் தீர்வில் 'எவையேனுமிரு' மாறிலிகளே இரா. ஆனுல் இப்படிப் பெறப்படும் தீர்வு, மற்ற தீர்வுகளிலிருந்து வேறு பட்டதாயிருக்கும்; அதுமட்டுமல்ல, $\varphi(x, y, z, a, b)=0$ என்ற தொடர்பில் a, b-க்குச் சிறப்பான மதிப்புகள் கொடுக்கப்பட்டுப் பெறப்படுகின்ற 'சிறப்புத் தொகைத் தீர்வினின்றும்' வேறுபட்ட தாயிருக்கும். எனவே,

$$\varphi(x, y, z, a, b)=0$$

$$\frac{\delta \varphi}{\delta a} = 0$$

$$\frac{\delta \varphi}{\delta b} = 0$$

என்ற மூன்று சமன்பாடுகளிலிருந்து பெறப்படும் தொடர்பும்,

$f(x, y, z, p, q)=0$ என்ற பகுதி வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டில் ஒரு தீர்வு என இருக்கும்.

இந்தத் தீர்வு, 'தனிச் சிறப்புத் தீர்வு' (singular integral) எனப்படும். இது எந்த 'ஏதாமொரு' மாறிலியில்லாத ஒரு தொடர்பாயிருக்கும். இது சில நேரங்களில் 'முழுத் தீர்வின்' ஒரு சிறப்பான தீர்வாகவும் அமையக்கூடும். ஆனால் இது எப்பொழுதும் நேராது. இந்தத் 'தனிச் சிறப்புத் தீர்வு' என ஒன்று இருக்குமானல், அது சாதாரணமாக 'முழுத் தீர்வி'லிருந்து வேறுபட்டுத் தானிருக்கும்.

12-4·2 : $R=0$ ஆனல் 7-ம், 8-ம் ஒருங்கே பொருத்தமாகும். ஆனல் அப்பொழுது a, b என்னும் இரண்டும் ஒன்றுக்கொன்று தொடர்புடைத்தான சார்புகளாக இருக்கும். ('வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகள்', முதற் புத்தகம், பகுதி 1·54-ல் காண்க.) அதாவது $\phi(a, b)=0$ அல்லது $b=\phi(a)$ என்ற தொடர்பு, a, b இரண்டையும் இணைத்து நிற்கும். இந்தத் தொடர்பை,

$\varphi(x, y, z, a, b)=0$ என்ற தீர்வில் ஈடு செய்தால், $\varphi[x, y, z\ a, \phi(a)]=0$ என்ற தீர்வு கிடைக்கும். 'a', '$\phi(a)$'-இரண்டும் x, yஆல் ஆன சார்புகளெனக் கொண்டால், முன் கூறிய மாதிரியே பகுதி வகைக்கெழு கண்டால்

$$\frac{\delta\varphi}{\delta x}+\frac{\delta\varphi}{\delta z}p+\frac{\delta\varphi}{\delta a}\quad\frac{\delta a}{\delta x}=0$$

$$\frac{\delta\varphi}{\delta y}+\frac{\delta\varphi}{\delta z}q+\frac{\delta\varphi}{\delta a}\quad\frac{\delta a}{\delta y}=0$$ என வரும்.

p, q-ன் மதிப்புகள் மாருதிருக்க வேண்டுமாயின்,

$$\frac{\delta\varphi}{\delta a}\quad\frac{\delta a}{\delta x}=0 \qquad ...(10)$$

$$\frac{\delta\varphi}{\delta a}\quad\frac{\delta a}{\delta y}=0 \qquad ...(11)$$

என்ற இரண்டும் ஒருங்கே உண்மையாக வேண்டும். (10)ஐ dxஆல் பெருக்கி (11)ஐ dyஆல் பெருக்கிக் கூட்டினல், $\frac{\delta\varphi}{\delta a}\ da=0$ என வரும்,

எனவே, $\frac{\delta\varphi}{\delta a} = 0$ என்பது, (10), (11)-இரண்டிற்கும் பொருத்தமாக அமையும் கட்டுப்பாடாகிறது; இதிலிருந்து 'a' கண்டு $\varphi\,[x, y, z, a, \phi(a)] = 0$-ல் ஈடு செய்தால் மாறிலியே இல்லாத ஒரு தொடர்பு,

$\phi\,(x, y, z) = 0$ எனக் கிடைக்கும். இதுவும் $f(x, y, z, p, q) = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வாகும். இது 'பொதுத் தீர்வு' **(general integral)** எனப்படும்.

12-4·3 : முன் கூறியனவற்றையெல்லாம் தொகுத்துக் கூறுமிடத்து,

(1) $\varphi\,(x, y, z, a, b) = 0$ என்ற சமன்பாட்டிலிருந்து, a, b என்பவற்றை நீக்கினல், பெறப்படும் $f\,(x, y, z, p, q) = 0$ என்ற சமன்பாட்டிற்கு இவ்வகைக்கெழு பிறந்த முறைப்படி, $\varphi\,(x, y, z, a, b) = 0$ என்பது முழுத்தீர்வு ஆகும். (a, b—மாறிலிகள்)

(2) a. b-க்குச் சிறப்பான மாறிலி மதிப்புகள் கொடுத்துப் பெறப்படும்

$\varphi\,(x, y, z, a, b) = 0$ என்பது ஒரு சிறப்புத் தீர்வாகும்.

(3) p, q-ன் மதிப்பு மாருவண்ணம் நாம் a, b ஐ (மாறிலிகளாகக் கொள்ளாமல்) x, y-ன் சார்புகளாகக் கொண்டு, $\varphi\,(x, y, z, a, b) = 0$-லிருந்து $f\,(x, y, z, p, q) = 0$ என்ற சமன்பாட்டையே பெற வேண்டுமாயின் பொதுவாக, $\frac{\delta\varphi}{\delta a} = 0$, $\frac{\delta\varphi}{\delta b} = 0$ என்ற கட்டுப்பாடு தேவைப்படும். இக் கட்டுப்பாடுகளின் அடிப்படையில் a, b என்ற (x, y) சார்புகளைக் கண்டு அவற்றின் மதிப்பினை,

$\varphi\,[x, y, z, a, b] = 0$-ல் ஈடு செய்தால் நாம் $f\,(x, y, z, p, q) = 0$-க்குரிய ஒரு தீர்வினைப் பெறுவோம்; ஆனல் அத்தீர்வில் மாறிலிகளே இரா. அப்படிப்பட்ட தீர்வு 'தனிச் சிறப்புத் தீர்வு' எனப்படும்.

(4) சில சமயங்களில் a, b என்ற சார்புகளை $b = \phi\,(a)$ என்ற சார்பு இணைக்குமாயின், p, q-ன் மதிப்பு மாறு வண்ணம், $\varphi\,[x, y, z, a, \phi\,(a)] = 0$ என்ற தொடர்பிலிருந்து, $f\,(x, y, z, p, q) = 0$ என்ற வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டைப் பெற வேண்டின், $\frac{\delta\varphi}{\delta a} = 0$ என்ற கட்டுப்பாடு தேவைப்படும். இதிலிருந்து 'a' கண்டு

$\varphi\,[x,y,z,a,\phi\,(a)\,]=0$-ல் ஈடு செய்தால், $f(x,y,z,p,q)=0$ க்குரிய மற்றொரு தீர்வினைப் பெறுவோம்; அத்தீர்விலும் மாறிலியிராது. அப்படிப்பட்ட தீர்வு 'பொதுத் தீர்வு' எனப்படும்.

12-4·41 : நடைமுறையில் தனிச் சிறப்புத் தீர்வு பெறும் முறை.

$$\varphi\,(x,y,z,a,b)=0$$

$$\frac{\delta\varphi}{\delta a}=0$$

$$\frac{\delta\varphi}{\delta b}=0$$

என்ற மூன்று சமன்பாடுகள் கொண்டு a, b ஐ நீக்கிப் பெறப்படும், மாறிலிகளேயில்லாத தொடர்புதான் தனிச் சிறப்புத் தீர்வாகும். இந்த முறைப்படிதான் 'தனிச் சிறப்புத் தீர்வு' என வரையறுக்கப்பட்ட தீர்வு பெறப்படுவது காண்க.

12-4·42 : நடைமுறையில் 'பொதுத் தீர்வு' காணும் முறை.

$$\varphi\,[x,y,z,a,\phi\,(a)\,]=0$$

$$\frac{\delta\varphi}{\delta a}=0$$

என்ற இரு தொடர்புகளினின்றும் 'a'ஐ நீக்கிப் பெறப்படும், மாறிலியில்லாத் தீர்வு 'பொதுத் தீர்' வாகும். இத்தீர்வு $b=\phi\,(a)$ என்ற தொடர்பிற்கு உரிய தீர்வாகும். வெவ்வேறு தொடர்புகளுக்கு வெவ்வேறு 'பொதுத் தீர்வு' பெறப்படும். இந்த முறைப்படியே 'பொதுத் தீர்வு' என வரையறுக்கப்பட்ட தீர்வு பெறப்படுவது காண்க.

12-4·5 : இங்கு விளக்கப்பட்ட எல்லா விதமான தீர்வுகளையும் கண்ட பிறகு, அவை, கொடுக்கப்பட்ட பகுதி வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டுக்குப் பொருத்தமான தீர்வுகளாவெனச் சரி பார்த்து விடுதல் நல்லது. பொருந்தாதனவற்றை விலக்கிவிடல் வேண்டும்.

பகுதி வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகளுக்கு, முழுத் தீர்வு காண்பதோடு மட்டும் நின்றுவிடாது (a) தனிச் சிறப்புத் தீர்வினையும், (b) பொதுத் தீர்வினையும் கண்டு, மூன்றினையும் குறிப்பிட்டால் தான் அச் சமன்பாட்டை முழுவதும் தீர்த்ததாகக் கொள்ளப்

படும். முதலில் முழுத் தீர்வு காண வேண்டும்: பின்னர் 12-4·41, 12-4·42-ல் விளக்கிய முறைப்படி மற்ற இரண்டும் காணவேண்டும். பின்னிரண்டு தீர்வுகள் பொருத்தமா, இல்லையா என்று கண்டு முடிவுகளைக் கூறவேண்டும். இதுவே கொடுக்கப்பட்ட வகைக் கெழுச் சமன்பாட்டினை முற்றிலும் தீர்த்து விடைகள் வழங்கு வதாகும்.

12-4·51 : எனவே பகுதி வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகளுக்கு மூன்று முற்றிலும் வேறுபட்ட வகையான தீர்வுகள், இருக்கலா மெனத் தெரிகிறது.

ஆனால் ஒரு கேள்வி எழ இடமுண்டு ; அதாவது இம்மூன்று வகையான தீர்வுகளும் அச் சமன்பாட்டிற்குரிய எல்லாத் தீர்வுகளை யும் தம்மகத்தே பெற்றுள்ளனவா ? சாதாரணமாக அப்படித் தான் ; ஆனால் முற்றிலும் பொதுவாக இது உண்மையென்று கூற இயலாது. ஒரு சில அமைப்புகளிலுள்ள பகுதி வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகள் இவ்விதிக்கு விலக்காகலாம். அப்படி, இம்மூன்று வகைகளுக்கும் அப்பாற்பட்டு வேறு எவையேனும் தீர்வுகள் பெறப்படுமானால், அவை ஒரு தனிப்பட்ட வகையானவை. (special integrals) என்று பிரிக்கப்படுகின்றன. ஆனால் இவை எப்பொழுதும் நேர்வதில்லை. எனவே சாதாரணமாக, பின் கூறப் படும் தேற்றத்தை நிறுவாமல் ஏற்போம்.

'ஒரு பகுதி வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டிற்கு (தனிப்பட்ட வகையான தீர்வுகள் நீங்கலாக) உள்ள ஒவ்வொரு தீர்வும், 'முழுத் தீர்வு', 'தனிச் சிறப்புத் தீர்வு', 'பொதுத் தீர்வு' என வரை யறுக்கப்பட்ட தீர்வுகளில் ஒன்றில்லாவிட்டால், மற்றொன்றில் அடங்கியிருக்கும்.'—அதாவது இம் மூன்றில் ஏதாவது ஒன்றில் அடங்கியிருக்கும். (நிறுவன் முறை : Forsyth : A Treatise on Differential Equations § 184 காண்க.)

12-4·52 : பின்வரும் எடுத்துக்காட்டு கொண்டு இவ்வித மான பல்வேறு தீர்வுகளை விளக்குவோம் :

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+z^2=r^2 \qquad ...(1)$$

என்ற சமன்பாட்டை எடுத்துக் கொள்வோம். இது $(\alpha, \beta, 0)$ மையங்கொண்டு, $\underline{r}$ ஆரம் கொண்ட ஒரு கோளமாகும். $\underline{r}$ என ஒரு குறிப்பிட்ட மதிப்பை ஏற்போமானால், XOY தளத்தில் உள்ள இரு கந்தழி எண்ணிக்கையுள்ள புள்ளிகள் (a double infinity of points) ஒவ்வொன்றையும் மையங்கொண்டு, $\underline{r}$ ஆரம் கொண்ட

இரு கந்தழி எண்ணிக்கையுள்ள ஒரு கோளக் குடும்பம் கிடைக்கும்.

இதன் பகுதி வகைக்கெழுச் சமன்பாடு பார்ப்போம்.

(1)-க்குப் பகுதி வகைக்கெழு கண்டால்,

$$x-\alpha+z\,p=0$$

$$y-\beta+z\,q=0$$

இந்த மதிப்புகளை ஈடு செய்தால்,

$$(-zp)^2+(-zq)^2+z^2=r^2$$

அதாவது $z^2\,(p^2+q^2+1)=r^2$ ...(2)

என்ற பகுதி வகைக்கெழுச் சமன்பாடு கிடைக்கும். எனவே திரும்பிப் பார்க்கும்போது,

(2) என்ற சமன்பாட்டின் முழுத் தீர்வு,

$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+z^2=r^2$ என்பதாம்.

இங்கு α, β என இரு மாறிலிகள் உள்ளன; அதாவது சார்பில் மாறிகள் இரண்டு x, y உள்ளன; அவற்றிற்கொப்ப இரண்டு மாறிலிகள் தீர்வில் தோன்றுகின்றன ; எனவே,

$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^3+z^2=r^2$ ...(1)

(2)-ன் 'முழுத் தீர்வாகும்'.

இதற்குத் தனிச் சிறப்புத் தீர்வு காண்போம். 12-4·41-ல் விளக்கிய முறைப்படி

$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+z^2=r^2$ ...(2)

$$\frac{\delta\varphi}{\delta\alpha}=2\,(x-\alpha)\,(-1)\qquad=0 \qquad ...(3)$$

$$\frac{\delta\varphi}{\delta\beta}=2\,(y-\beta)\,(-1)\qquad=0 \qquad ...(4)$$

(1), (3), (4) கொண்டு, α, β-என்ற இரண்டினையும் விலக்கினுல், $z^2=r^2$ ...(5)

அல்லது $z=\pm r$ ...(6)

என்ற தொடர்பு வரும்.

இதுவே 'தனிச் சிறப்புத் தீர்வு' ஆகும். இதைப் பார்த்தால், (6) என்ற சமன்பாடு, XOY தளத்திற்கு, மேலும், கீழும் r அளவு குத்துயரத்தில் அமையும் இரு இணைத் தளங்கள் (parallel planes to XOY). இது கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடு (2)-க்குப் பொருந்து கின்றதாவெனப் பார்த்தால், பொருந்துவது காணலாம்.

$z = \pm r$-க்கு

$$\frac{\delta z}{\delta x} = p = 0\,;\; \frac{\delta z}{\delta y} = q = 0\,;$$

$\therefore$ $z^2\,(0+0+1) = r^2$ எனப் பொருந்துவது காண்கிறோம். எனவே $z = \pm r$ என்பது 'தனிச் சிறப்புத் தீர்வு'; சமன்பாட்டிற்கும் பொருத்தமானது.

அடுத்தபடியாக, பொதுத் தீர்வு ஏதாவதொன்று காண்போம். இதற்கு $\alpha = F\,(\beta)$ என ஏற்போம். இத்தொடர்பினை $\alpha = \beta$ எனக் கொண்டு பொதுத் தீர்வினைக் காண்போம். [12-4·42-ல் விளக்கப் பட்ட முறை]

அப்பொழுது,

$(x-\alpha)^2 + (y-\alpha)^2 + z^2 = r^2$ ...(1)

$$\frac{\delta \varphi}{\delta \alpha} \equiv 2\,(x-\alpha)\,(-1) + 2\,(y-\alpha)\,(-1) = 0 \quad ...(7)$$

என வரும்.

(1)-க்கும், (7)-க்கும் இடையே α ஐ விலக்குவோம். அதற்கு $\alpha = \dfrac{x+y}{2}$ என்ற தொடர்பு பயன்படும்.

$$\left(x - \frac{x+y}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{x+y}{2}\right)^2 + z^2 = r^2$$ என

வரும். அதாவது $(x-y)^2 + 2z^2 = 2r^2$ ...(8)

என வரும். இதுவே ஒரு பொதுத் தீர்வு எனப்படும்.

இது கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடு (2)-க்குப் பொருந்து கின்றதாவெனப் பார்ப்போம்.

(8)-ன் x, y ஒட்டிய பகுதி வகைக்கெழு கண்டால்

$2\,(x-y) + 4zp = 0$

$-2\,(x-y) + 4zq = 0$ என வரும்.

$$\therefore \quad p = \frac{y-x}{2z}$$

$$q = \frac{x-y}{2z}$$ என வரும்.

இந்த p, q மதிப்புகள்
$z^2(p^2+q^3+1)=r^2$ என்பதற்குப் பொருத்தமாவெனப் பார்ப் போம்.

$$z^2(p^2+q^2+1) = z^2\left[\left(\frac{y-x}{2z}\right)^2 + \left(\frac{x-y}{2z}\right)^2 + 1\right]$$

$$= z^2\left[\frac{(y-x)^2 + 2z^2}{2z^2}\right]$$

$$= \frac{(y-x)^2 + 2z^2}{2}$$

$\therefore z^2(p^2+q^2+1)=r^2$ எனப் பொருத்தமாகிறது. (8) காண்க. எனவே 'பொதுச் சிறப்புத் தீர்வும்' கொடுக்கப்பட்ட பகுதி வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டுக்குப் பொருத்தமாயிருக்கிறது.

எனவே,

$z^2(p^3+q^2+1)=r^2$ என்ற சமன்பாட்டிற்கு

(i) $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+z^2=r^2$ 'முழுத் தீர்வு' ஆகும்;

(ii) $z=\pm r$ 'தனிச் சிறப்புத் தீர்வு' ஆகும்;

(iii) $(x-y)^2+2z^2=2r^3$ 'பொதுச் சிறப்புத் தீர்வு' ஆகும். ஆனால் (iii) என்பது $\alpha=\beta$ என்ற தொடர்பின் அடிப்படையில் பெறப்படுகிறதென்பதைக் கவனத்தில் வைக்கவேண்டும்.

பயிற்சி : $\alpha=-\beta$ என்ற தொடர்பின் அடிப்படையில் பொதுச் சிறப்புத் தீர்வு, $(x+y)^2+2z^2=2ı^2$ எனப் பெறப்படுமென நிறுவி மேல் குறிப்பிட்ட முறைப்படி சரி பார்க்க.

எ. கா.

$z = \frac{x^2}{a} + ay^2 + b$ என்ற தொடர்பிலிருந்து $pq=4xy$ என்ற பகுதி வகைக்கெழுச் சமன்பாடு பெறப்படுகிறது. இதன் தனிச்

சிறப்புத் தீர்வு என்ன ? $a=b$ என்ற தொடர்பில் இதன் பொதுத் தீர்வு என்ன ? $z=2xy+c$ என்பது $pq=4xy$ என்ற சமன்பாட்டிற்கு மற்றொரு தீர்வு எனக் கொடுக்கப்படின், அது எவ்வகைப் பட்ட தீர்வு எனக் காண்க.

$$\text{(i)} \quad \varphi\,(x\text{i}\; y,\, z,\, a,\, b) \equiv \frac{x^2}{a} + ay^2 + b - z = 0 \qquad \ldots(1)$$

$$\frac{\delta\varphi}{\delta a} \equiv -\frac{x^2}{a^2} + y^2 \qquad = 0 \qquad \ldots(2)$$

$$\frac{\delta\varphi}{\delta b} \equiv \qquad 1 \qquad = 0 \qquad \ldots(3)$$

(3) ஒரு பொருந்தா முடிவாகையால் இதற்குத் தனிச் சிறப்புத் தீர்வு கிடையாது.

(ii) $a=b$ எனக் கொண்டால்

$$\frac{\delta\varphi}{\delta a} \equiv -\frac{x^2}{a^2} + y^2+1 = 0 \qquad \ldots(4)$$

$\therefore \quad a^2 = \dfrac{x^2}{y^2+1}$ அல்லது $a = \dfrac{x}{\sqrt{y^2+1}}$ என வரும்.

இதை (1)–ல் $a=b$ எனக் கொண்டு ஈடு செய்தால்,

$$\frac{x^2}{x}\sqrt{y^2+1} + \frac{x}{\sqrt{y^2+1}}\,y^2 + \frac{x}{\sqrt{y^2+1}} = z \text{ என வரும்.}$$

அதாவது

$$x\sqrt{y^2+1} + \frac{xy^2+x}{\sqrt{y^2+1}} = z$$

அதாவது $x\,(y^2+1)+x\,(y^2+1)=z\,\sqrt{y^2+1}$

அதாவது $2x\,\sqrt{y^2+1}=z$

அதாவது $4x^2\,(y^2+1)=z^2$ என வரும்.

இதுவே $a=b$ என்ற தொடர்போடு, பெறப்படும் தீர்வாகும். இது சமன்பாட்டிற்குப் பொருந்துகிறதாவெனப் பார்ப்போம்.

$z=2x\sqrt{y^2+1}$ எனக் கொண்டால்

$$\frac{\delta z}{\delta x}=p=2\sqrt{y^2+1}$$

$$\frac{\delta z}{\delta y}=q=\frac{2xy}{\sqrt{y^2+1}}$$

$\therefore pq=4xy$ எனப் பொருத்தமாகிறது.

எனவே $4x^2(y^2+1)=z^2$ என்பது ஒரு பொதுத் தீர்வாகும்.

(iii) இப்பொழுது தனிச் சிறப்புத் தீர்வில்லையெனக் கண்டு கொண்டோம். எனவே $z=2xy+c$ என்பது வேறு ஒரு பொதுத் தீர்வாக இருக்கலாம்; அல்லது ஒரு தனிப்பட்ட வகையான தீர்வாக இருக்கலாம் (special integral).

பொதுத் தீர்வாக இருப்பின், அது

$$\varphi\left[x, y, z, a, f(a)\right]\equiv\frac{x^2}{a}+ay^2+f(a)-z=0 \quad ...(5)$$

$$\frac{\delta\varphi}{\delta a}\equiv-\frac{x^2}{a^2}+y^2+f^1(a)=0 \quad ...(6)$$

என்ற இரு சமன்பாடுகளினின்றும் 'a' நீக்கிய நீக்குறுவாக இருக்க வேண்டும்; இங்கு $b=f(a)$ என்று ஒரு தொடர்பை ஏற்றுக் கொண்டிருக்கிறோமென்பதைக் கவனிக்க வேண்டும். $z=2xy+c$ என்பது $pq=4xy$ என்ற சமன்பாட்டின் ஒரு தீர்வாக இருக்கிறதெனக் கொடுக்கப்பட்டிருப்பதால்

$$\frac{\delta z}{\delta x}=p=2y$$

$$\frac{\delta z}{\delta y}=q=2x$$

என்ற மதிப்புகள் பொருந்துவது காணலாம். ஆனால் (5)-ன் படி

$$p=\frac{\delta z}{\delta x}=\frac{2x}{a}=2y \text{ எனவும்,}$$

$$q=\frac{\delta z}{\delta y}=2ay=2x \text{ எனவும்}$$

பெறுகிறோம். எனவே $a=\frac{x}{y}$ என்ற தொடர்பு பெறலாம்.

இம் மதிப்பை (5), (6)-ல் ஈடு செய்தால்,

$$\frac{x^2}{x/y} + \frac{x}{y} y^2 + f\left(\frac{x}{y}\right) = z \quad \text{...(7)}$$

$$\frac{-x^2}{x^2/y^2} + y^2 + f'\left(\frac{x}{y}\right) = 0 \quad \text{...(8)}$$

$\therefore$ (8)-லிருந்து $f'\left(\frac{x}{y}\right) = 0$ எனப் பெறுகிறோம்.

$\therefore f\left(\frac{x}{y}\right) = c$ என வரும்.

இதை (7)-ல் ஈடு செய்தால்

$xy + xy + c = z$

அல்லது $z = 2xy + c$ என வரும்.

எனவே $z = 2xy + c$ என்ற பொதுத் தீர்வானது $f(a) = c$ என்று எடுத்து வரும் தீர்வாகும்.

வடிவ கணிதப் பொருத்த விளக்கம்

12·5 : இத்தீர்வுகளுக்கு வடிவ கணிதப் பொருள்கள் என்னவெனச் சுருக்கமாகக் காணலாம்.

தனிச் சிறப்புத் தீர்வு (Singular Integral)

$\varphi(x, y, z, a, b) = 0$ என்பதற்குரிய பரப்புகள் இரு கந்தழி எண்ணிக்கையுள்ள பரப்புகளாகும் (a double infinity of surfaces). ஏனெனில், a என்ற மாறிலிக்கென ஒரு கந்தழி எண்ணிக்கையுள்ள பரப்புகளும், b என்ற மாறிலிக்கென மற்றொரு கந்தழி எண்ணிக்கையுள்ள பரப்புகளும் கிடைக்கப் பெறும். $\varphi(x, y, z, a, b) = 0$ என்ற பரப்புகளின் வரை தொடு பரப்பின் (envelope) மேலுள்ள ஒவ்வொரு புள்ளியிலும், $\varphi(x, y, z, a, b) = 0$ என்ற குடும்பத்தின் ஏதாவது ஒரு பரப்பு தொட்டுக் கொண்டு செல்லுமாதலால், $f(x, y, z, p, q) = 0$ என்ற சமன்பாட்டிற்கு, வரை தொடு பரப்புக்குரிய சார்பும் ஒரு தொகைத் தீர்வாகும். (The equation of the envelope is also an integral of the given equation).

அவ்வரை தொடு பரப்பின் சமன்பாடு காணும் முறை பின்வருமாறு :

$$\varphi\,(x, y, z, a, b)=0 \qquad ...(3)$$

$$\frac{\delta\varphi}{\delta a} = 0 \qquad ...(4)$$

$$\frac{\delta\varphi}{\delta b} = 0 \qquad ...(5)$$

என்ற மூன்று சமன்பாடுகளுக்குமிடையே a, b என்ற மாறிலிகளை விலக்கி வரும், x, y, z என்பவற்றைப் பெற்ற சார்பே, அவ்வரை தொடு பரப்பின் சமன்பாடாகும். (**Charles Smith : Solid Geometry** § 211–215 என்ற பத்திகளில் இது நிறுவப்பட்டிருப்பது காண்க.)

இவ்விதமாகப் பெறப்படும் தீர்வு, **தனிச் சிறப்புத் தீர்வு** (**singular integral**) எனவும், இத்தீர்வு, முழுத் தீர்வில் அடங்கியிராது எனவும், இது, சிறப்புத் தீர்வினின்றும் வேறுபட்ட ஒரு தீர்வாகுமென்பதும் நாம் முன்னர் 12·41-ல் கண்டோம்.

12-5 1 : பொதுத் தீர்வு : $\varphi\,(x, y, z, a, b)=0$ எனப் பெறப்பட்ட முழுத் தீர்வில் $b=F\,(a)$ என்று, ஒரு மாறிலியை மற்றொரு சார்பின் மாறிலியாகக் கொண்டால், $\varphi\,[x, y, z, a, F\,(a)]=0$ என்று வரும். இது ஒரு கந்தழி எண்ணிக்கையுள்ள பரப்புகளைக் குறிக்கும். ஆனால் இவை, யாவும்,

$\varphi\,(x, y, z, a, b)=0$ என்ற அமைப்பில் காணப்படும் பரப்புகளின் ஒரு குடும்பத்தைக் குறிக்கும்.

'தனிச் சிறப்புத் தீர்வு' எந்தக் காரணத்தால் $f\,(x, y, z, p, q)=0$-ன் ஒரு தீர்வாகிறதோ, அதே காரணத்திற்காக,

$\varphi\,[x, y, z, a, F\,(a)]=0$ என்ற பரப்புக் குடும்பத்தின் வரை தொடு பரப்பும், கொடுக்கப்பட்ட பகுதி வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டிற்குப் பொருத்தமாகி, மற்றுமொரு, தொகைத் தீர்வாகும்.

இது $\varphi\,[x, y, z, a, F\,(a)]=0 \qquad ...(6)$

$$\frac{\delta\varphi}{\delta a} = 0 \qquad ...(7)$$

என்ற இரு சமன்பாடுகளினின்றும் 'a' விலக்கிப் பெறப்படும் x, y, zஆல் அமைந்த 'நீக்குறு' வாகும். இந் 'நீக்குறு' வே, 'பொதுத்

தீர்வு' (general integral) எனப்படும். இது 12·42-ல் முன் ஒரு முறை விளக்கப்பட்டிருக்கிறது. இது தனிச் சிறப்புத் தீர்வி னின்றும் வேறுபட்டிருக்கும் ; சாதாரண சிறப்புத் தீர்வினின்றும் வேறுபட்டிருக்கும் ; இதிலும் மாறிலிகள் எவையும் இரா.

(6), (7) இரண்டும் சேர்ந்து இரு பரப்புகள் வெட்டிக் கொள்ளும் ஒரு வளைவரை (curve) தரும். இந்த வளைவரை, ஒரு குறிப்பிட்ட 'a' மதிப்புக்கு, (6) என்ற குடும்பத்தில் அடுத்தடுத்த இரு பரப்புகள் வெட்டிக்கொள்ளும் வளைவரையாகும். பொது வாக (3), (4), (5) கொண்டு வரை தொடு பரப்பு கண்டால், இந்த வளைவரை அதன் மேலிருக்கும். இந்த வளைவரைக்குச் 'சிறப்பு வளைவரை' (characteristic of the envelope) என்பது பெயர். ஆகவே இவ் வளைவரையின் இயங்கு வழியாக வரைதொடு பரப்பு அமைவதைக் காணலாம்.

12·52 : மேற்கூறிய வடிவ கணித விளக்கங்களோடு 12-452-ல் விளக்கப்பட்ட எடுத்துக்காட்டினைப் புரிந்து கொள்ள முயற்சி செய்வோம். 12·452-ல் (6) எனப்பட்ட தனிச் சிறப்புத் தீர்வான இரு இணை தளங்களும், அதாவது $z = \pm r$ என்ற தளங்கள்

$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+z^2=r^2$ என்ற இரு கந்தழி எண்ணிக்கை யுள்ள கோளங்களைத் தொட்டு நிற்பனவாம். ஆகவே அவ்விரு தளங்களும் சமன்பாட்டு முழுத் தீர்வான (1) எனக் குறிப்பிடப் படும் கோளக் குடும்பத்தின் வரை தொடு பரப்புகளாயிருப்பது நமக்கும் புலனாகிறது.

அதாவது தனிச் சிறப்புத் தீர்வானது (1) என்ற கோள குடும்பத்தின் வரை தொடு பரப்புகளைத் தருகிறது.

(b) $\alpha=\beta$ என்ற தொடர்பு கொண்டால்

$(x-\alpha)^2+(y-\alpha)^2+z^2=r^2$ என்ற கோளம் கிடைக்கும். இதன் சிறப்பு யாதெனில் $y=x$ என்ற நேர்கோட்டின் மேல் மையங் கொண்டு, r என்ற ஆரம் கொண்ட ஒரு கந்தழி எண்ணிக்கை யுள்ள கோளங்கள் கிடைக்கும். இவற்றின் வரை தொடு பரப்பு,

$(x-y)^2+2z^2=2r^2$ என்ற அமைப்பில் குழாய் வடிவில் r ஆரங் கொண்ட ஓர் உருளையாகும். இவ்வுருளை, $y=x$ என்ற நேர்கோட் டின் மேல் மையங்கொண்டு, r என்ற ஆரங்கொண்ட கோளங் களால் உருவாக்கப்படுகிறது. இப்பரப்பின் மேல், அதாவது

$(x-y)^2+2z^2=2r^2$ என்ற உருளையின் பரப்பின் மேலுள்ள புள்ளிகள் யாவும்

$f\ (x, y, z, p, q) \equiv z^2(p^2+q^2+1)=r^2$ என்ற சமன்பாட்டுக்குப் பொருந்தும். இதை நாம் முன்னரே கண்டிருக்கிறோம். (12-4·52 காண்க.)

$\alpha=\beta$ என்ற தொடர்பை விட்டு, α, β-இரண்டுக்கும் வேறொரு தொடர்பை எடுத்துக் கொள்வோம். $\alpha^2+\beta^2=a^2$ என்ற தொடர்பை எடுத்துக் கொள்வோம். அப்பொழுது பெறப்படும் பொதுத் தீர்வு, எப்படியிருக்குமெனில் xy தளத்தில் $x^2+y^2=a^2$ என்ற வட்டத்தின் மேல் உள்ள புள்ளிகளில் மையங்கொண்டு, r என்ற ஆரம் கொண்டு பெறப்படும் கோள குடும்பத்தைத் தொட்டுச் செல்லும் ஒரு குழாய், அல்லது உருளை வடிவில் இருக்கும் பரப்பின் சமன்பாடாய் இருக்கும்.

12-6 : முன்னர் பகுதி (A)-ல் 12·3-ல்

$$\varphi\ (u, v)=0 \qquad ...(1)$$

என்ற தொடர்பிலிருந்து

$$Pp+Qq=R \qquad ...(2)$$

என்ற 'φ' நீக்கிய வகைக்கெழுச் சமன்பாடு காணலாமென அறிந்தோம்.

இப்பொழுது (2) என்ற சமன்பாட்டிற்கு (1) என்பது தீர்வாகும். இதற்கு மற்றெல்லாத் தீர்வுகளையும்விட ஒரு பொதுத் தன்மையுண்டு; ஏனெனில் 'φ' என்பது ஒரு தன்னிச்சையாக (arbitrary function) நாம் கொள்ளும் ஒரு சார்புத் தொடர்பு. எடுத்துக்காட்டாக, 12-311...(1) என்ற எடுத்துக் காட்டின்படி,

$$\frac{p}{q}=\frac{x}{z}$$

அல்லது $py-qx=0$ என்ற பகுதி வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டிற்கு,

$z=F\ (x^2+y^2)$ என்ற பொது அமைப்புத் தீர்வு பெறப்படும்.

இதை $z=a\ (x^2+y^2)^2+b\ (x^2+y^2)$ என்றோ ;

$z=a \cos\ (x^2+y^2)\ ^-\ b\ \sin 2\ (x^2+y^2)$ என்றோ ;

$z=a\ e^{(x^2+y^2)}+b\ e^{-(x^2+y^2)}$ என்றோ

எப்படிக் கூறினாலும், இவையெல்லாம் $py-qx=0$ என்ற சமன் பாட்டிற்குரிய தீர்வுகளாகும்.

12-7. ஒரு வரிசைச் சமன்பாட்டிற்கு மாற்றிணையான சமன்பாடு (Equati n equivalent to the linear equation)

$$Pp+Q\,q=R \qquad \ldots(1)$$

என்ற அமைப்பை எடுத்துக் கொள்வோம்.

$u\,(x,\ y,\ z)=a$ என்பது இச்சமன்பாட்டிற்குப் பொருந்துகிறது எனக் கொள்வோம். x, y ஐ ஒட்டி, பகுதி வகைக்கெழு கண்டால்,

$$\frac{\delta u}{\delta x}+\frac{\delta u}{\delta z}\,p=0$$

$$\frac{\delta u}{\delta y}+\frac{\delta u}{\delta z}\,q=0$$

எனவே

$$\left.\begin{aligned} p &= -\frac{\dfrac{\delta u}{\delta x}}{\dfrac{\delta u}{\delta z}} \\ q &= -\frac{\dfrac{\delta u}{\delta y}}{\dfrac{\delta u}{\delta z}} \end{aligned}\right\} \qquad \ldots(2)$$

இவற்றை (1)-ல் ஈடு செய்தால்

$$P\,\frac{\delta u}{\delta x}+Q\,\frac{\delta u}{\delta y}+R\,\frac{\delta u}{\delta z}=0 \qquad \ldots(3)$$

என்று பெறலாம்.

எனவே $u\,(x,\ y,\ z)=a$ என்பது (1)-க்குத் தீர்வாயின், அது (3)-க்கும் தீர்வாகும் என்பது வெளிப்படையாகத் தெரிகிறது.

மறுதலையாக, $u\,(x,\ y,\ z)=a$ என்பது (3)-க்குத் தீர்வாயின், அது (1)-க்கும் தீர்வாகும் என்பதும் உண்மையென நிறுவலாம்.

நிறுவன் முறை: (3)-ன் இரு பக்கங்களையும் $\dfrac{\delta u}{\delta z}$ ஆல் வகுத்தால்,

$$P\,\frac{\frac{\delta u}{\delta x}}{\frac{\delta u}{\delta z}} + Q\,\frac{\frac{\delta u}{\delta y}}{\frac{\delta u}{\delta z}} + R = 0$$ என வரும்.

(2)-லிருந்து ஈடு செய்தால்

$$P\,(-p)+Q\,(-q)+R=0$$

அல்லது $Pp+Qq=R$ என்ற சமன்பாடு (1) கிடைக்கப் பெறுவது காண்க.

எனவே (1)-ம், (3)-ம் ஒன்றுக்கொன்று மாற்றிணையான சமன்பாடுகள் (**equivalent equations**) என்பது நிறுவப்படுகிறது.

12-7·1 : முதல் வரிசைச் சமன்பாட்டிற்கு, இலகிராஞ்ஜ் (Lagrange) முறைப்படி தீர்வு காணல்

முன்னர் $u=a$ என்பதும், $v=b$ என்பதும்

$\dfrac{dx}{P} = \dfrac{dy}{Q} = \dfrac{dz}{R}$ என்ற சமன்பாடுகளின் தீர்வுகளானால்,

$$P\,\frac{\delta u}{\delta x} + Q\,\frac{\delta u}{\delta y} + R\,\frac{\delta u}{\delta z} = 0$$ என்பதும்,

$$P\,\frac{\delta v}{\delta x} + Q\,\frac{\delta v}{\delta y} + R\,\frac{\delta v}{\delta z} = 0$$ என்பதும்

உண்மையாகும் என்றும், இதன் மறுதலையும் உண்மையென்றும் 11·4-ல் நிறுவினோம். அதையொட்டி $\varphi\,(u,\ v)=0$ என்பது,

$\dfrac{dx}{P} = \dfrac{dy}{Q} = \dfrac{dz}{R}$ என்ற சமன்பாடுகளுக்கு ஒரு பொது அமைப்பிலுள்ள தொகைத் தீர்வாகும் என்றும் அங்குக் குறிப்பிட்டோம்.

எனவே, முன் கூறப்பட்ட யாவற்றையும் தொடர்பு படுத்திக் காணும்பொழுது பின்வரும் விதியை நாம் நடைமுறையில் ஏற்கலாம்.

அதாவது

$Pp+Qq=R$ என்ற முதல் வரிசைச் சமன்பாட்டிற்கு, முதலில் $\dfrac{dx}{P} = \dfrac{dy}{Q} = \dfrac{dz}{R}$ என்ற சமன்பாடுகளுக்குரிய $u\,(x,\ y,\ z)=a$; $v\,(x,\ y,\ z)=b$ என்ற தீர்வுகள் (சார்பற்றவை) காண்க.

அப்பொழுது,

$$\varphi\,(u, v) = c$$

அல்லது $F\,(u, v) = o$

அல்லது $f\,(u) \quad = v$

என்ற எந்த அமைப்பிலேனும் $P\,p + Q\,q = R$ என்ற சமன்பாட்டுத் தீர்வினை யெழுதலாம். இது, முதல் வரிசைப் பகுதி வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டிற்கு இலகிரான்ஜ் தீர்வு எனப்படும். துணையாகப் பயன்படும்

$\dfrac{dx}{P} = \dfrac{dy}{Q} = \dfrac{dz}{R}$ என்பவை இலகிரான்ஜ் துணைச் சமன்பாடுகள் எனப்படும். இவற்றிற்குரிய தீர்வுகளின் பரப்புகள் ஒன்றையொன்று வெட்டிக் கொள்ளும் வளை வரைகள் (**curves of intersection**), இலகிரான்ஜ் கோடுகள் எனப்படும்.

12-7·11 1 இலகிரான்ஜ் தீர்வு சரி பார்த்தல்

மற்ருெரு முறையிலும் இலகிரான்ஜ் வகுத்த முறை பொருத்தமெனச் சரி பார்க்கலாம். $u\,(x, y, z) = a$; $v\,(x, y, z) = b$ என்ற இரு சமன்பாடுகள் கொண்டு, a, b என்ற மாறிலிகளை நீக்குவோம்.

$$\frac{\delta u}{\delta x}\,dx + \frac{\delta u}{\delta y}\,dy + \frac{\delta u}{\delta z}\,dz = 0$$

$$\frac{\delta v}{\delta x}\,dx + \frac{\delta v}{\delta y}\,dy + \frac{\delta v}{\delta z}\,dz = 0$$

என்ற சமன்பாடுகளிலிருந்து,

$$\frac{dx}{\frac{\delta u}{\delta y}\frac{\delta v}{\delta z} - \frac{\delta u}{\delta z}\frac{\delta v}{\delta y}} = \frac{dy}{\frac{\delta u}{\delta z}\frac{\delta v}{\delta x} - \frac{\delta u}{\delta x}\frac{\delta v}{\delta z}}$$

$$= \frac{dz}{\frac{\delta u}{\delta x}\frac{\delta v}{\delta y} - \frac{\delta u}{\delta y}\frac{\delta v}{\delta x}} \qquad \ldots(1)$$

எனப் பெறலாம் (குறுக்குப் பெருக்கல் முறை).

முன்னர் 12·3-ல் $\varphi(u, v)=0$-ல் φ என்ற சார்பமைப்பை நீக்கிப் பெற்ற அமைப்பு பின்வருமாறு :

$$\left(\frac{\delta u}{\delta y}\ \frac{\delta v}{\delta z}-\frac{\delta u}{\delta z}\ \frac{\delta v}{\delta y}\right)p+\left(\frac{\delta u}{\delta z}\ \frac{\delta v}{\delta x}-\frac{\delta u}{\delta x}\ \frac{\delta v}{\delta z}\right)q$$

$$=\left(\frac{\delta u}{\delta x}\ \frac{\delta v}{\delta z}-\frac{\delta u}{\delta y}\ \frac{\delta v}{\delta x}\right) \quad \ldots(2)$$

(1)ஐயும், (2)ஐயும் ஒப்பிட்டுப் பார்த்தால் அவை முறையே

$\dfrac{dx}{P}=\dfrac{dy}{Q}=\dfrac{dz}{R}$ எனவும்,

$Pp+Qq=R$ எனவும் வருவது காண்க.

12-7·12. இதுவரை கண்டதை, ஓர் எடுத்துக்காட்டு மூலம் நிலைபெறச் செய்வோம்.

$y^2zp-x^2zq=x^2y$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வு காண்போம்.

இது $Pp+Qq=R$ என்ற அமைப்பிலுள்ளது. $P=y^2z$; $Q=-x^2z$; $R=x^2y$ என இருக்கின்றன. இலகிராஞ்ஜ் முறைப்படி, கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடும், $\dfrac{dx}{y^2z}=\dfrac{dy}{-x^2z}=\dfrac{dz}{x^2y}$ என்பதும் ஒன்றுக்கொன்று மாற்றிணையான சமன்பாடுகள். இதன் தீர்வுகள் காண,

$\dfrac{dx}{y^2z}=\dfrac{dy}{-x^2z}$ எனக் கொண்டால்,

$x^2dx+y^2dy=0$ என வரும்.

இதன் தொகை, $x^3+y^3+c=0$ என எழுதலாம்.

அதாவது, $u\equiv x^3+y^3+c$

மேலும் $\dfrac{dy}{-x^2z}=\dfrac{dz}{x^2y}$ எனக் கொண்டால்

$y\,dy+z\,dz=0$ என வரும்.

இதன் தீர்வு $y^2+z^2+c_1=0$ என எழுதலாம். அதாவது

$v\equiv y^2+z^2+c_1$

எனவே பொது அமைப்பில், நமக்கு முதலில் கொடுக்கப் பட்ட $y^2zp-x^2zq=x^2q$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வு, $\varphi\ [x^3+y^3, y^2+z^2]=A$ என வரப் பெறும்.

குறிப்பு : சரி பார்த்தல்

$\varphi\ [x^3+y^3, y^2+z^2]=A$ என்ற தொடர்பில் 'φ'ஐ நீக்க முயல்வோம். $x^3+y^3+c=u$ எனவும், $y^2+z^2+c_1=v$ எனவும் கொண்டு, வகைக்கெழு காண,

$$\frac{\delta\varphi}{\delta u}\ (3x^2\ +\ p\cdot 0)+\frac{\delta\varphi}{\delta v}\ (0+2zp)=0 \text{ எனவும்,}$$

$$\frac{\delta\varphi}{\delta u}\ (3y^2+\ q\cdot 0)\ +\ \frac{\delta\varphi}{\delta v}\ (2y+2zq)=0 \text{ எனவும் வரும்.}$$

$$\therefore\quad \frac{\delta\varphi}{\delta u}\ ,\ \frac{\delta\varphi}{\delta v} \text{ இரண்டையும் விலக்க,}$$

$$\frac{3x^2}{3y^2}=\frac{2zp}{2y+2zq} \text{ அல்லது}$$

$y^2zp=x^2y+x^2zq$ அல்லது

$y^2zp-x^2zq=x^2y$ என்ற சமன்பாடு பெறப்படுவது காண்க.

12-7·13 : $PP+Qq=R$ என்ற அமைப்பில் இரண்டு சமன் பாடுகளை எடுத்துக் காட்டாகச் செய்வோம்.

எ.கா. (1)

$xp+yq=z$ என்ற சமன்பாட்டினைத் தீர்க்க.

இலகிரான்ஜின் துணைச் சமன்பாடுகள்,

$$\frac{dx}{x}=\frac{dy}{y}=\frac{dz}{z}$$

இதன் தீர்வுகள் $z=ay,\ z=bx$.

எனவே இச்சமன்பாட்டின் தீர்வு

$$\varphi\ \left(\frac{z}{y}\ ,\ \frac{z}{x}\right)=0 \text{ என எழுதலாம்;}$$

அல்லது பின்வருமாறு எழுதுவதும் சரியாகும்

$u\equiv z-ay=0$

$v\equiv z-bx=0$

என எழுதி, தீர்வு, $f\ (z-ay,\ z-bx)=0$ எனவும் எழுதலாம்.

குறிப்பு (சரி பார்த்தல்):

$f(z-ay, \quad z-bx) = z-ay+z-bx$ எனக் கொண்டால், $2z=bx+ay$ என வரும்.

$$p = \frac{\delta z}{\delta x} = \frac{b}{2};$$

$$q = \frac{\delta z}{\delta y} = \frac{a}{2}$$

$$\therefore \quad xp+yq = x.\ \frac{b}{2} + y.\ \frac{a}{2}$$

$$= \frac{bx+ay}{2}$$

$= z$ எனச் சரியாக வருவது காண்க.

இப்பொழுது $2z=bx+ay$ என எடுத்துக் கொண்டு a; bஐ விலக்குக.

$$2p=b$$

$$2q=a$$

$$\therefore 2z=2px+2qy$$

அல்லது $z=px+qy$ என்ற சமன்பாடு வருவது காண்க.

எ.கா. (2):

$p \tan x+q \tan y=\tan z$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வு காண்க.

துணைச் சமன்பாடு, $\dfrac{dx}{\tan x} = \dfrac{dy}{\tan y} = \dfrac{dz}{\tan z}$

தொகை கண்டால்,

$$\log \sin x=\log \sin y+\log c_1$$

$$\log \sin x=\log \sin z+\log c_2$$

$$\therefore \quad \sin x=c_1 \sin y$$

$$\sin x=c_2 \sin z$$

என்ற இரு தீர்வுகள் வரும்.

எனவே தீர்வினை $\varphi\left[\frac{\sin x}{\sin y}, \frac{\sin x}{\sin z}\right] = 0$

என்றோ அல்லது $f[\sin x - c_1 \sin y, \sin x - c_2 \sin z] = 0$ என்றோ எழுதலாம்.

பயிற்சி 12·2

பின்வரும் சமன்பாடுகளுக்குத் தீர்வு காண்க :

(1) $y^2zp + x^2zq = xy^2$

(2) $px^2 + qy^2 = z^2$

(3) $xzp + yzq = xy$

(4) $(mz - ny)\, p + (nx - lz)\, q = ly - mx$

(5) $px + qy = 3z$

(6) $(y - z)\, p + (x - y)\, q = z - x$

(7) $ap + bq + cz = 0$

(8) $x\,(y - z)\, p + y\,(z - x)\, q = z\,(x - y)$

(9) $py - qx = y^2 - x^2$

விடை 12·2

(1) $\varphi\,(x^2 - z^2, x^3 - y^3) = 0$

(2) $\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = f\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{z}\right)$

(3) $\varphi\left(\frac{x}{y}, z^2 - xy\right) = 0$

(4) $lx + my + nz = \varphi\,(x^2 + y^2 + z^2)$

(5) $\varphi\left(\frac{z}{x^3}, \frac{z}{y^3}\right) = 0$ அல்லது $\phi\left(\frac{z}{y^3}, \frac{y}{x}\right) = 0$

(6) $\varphi\,(x^2+2yz,\ \ x+y+z)=0$; $x^2+2yz=\alpha(x+y+z)+\beta$ என்பது ஒரு முழுத் தீர்வாகும்.

(7) $z = e^{-cy/b}\varphi\ \ (ay-bx)$

(8) $\varphi\,(xyz,\ x+y+z)=0$

(9) $\varphi\,(x^2+y^2,\ xy-z)=0$

12-72 : இரண்டிற்கு மேற்பட்டு சார்பில் மாறிகள் தோன்றக்கூடிய பகுதி வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகள்-முதல் வரிசை (The linear equation involving more than two independent variables)

$x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n$ என்பவை n சார்பில் மாறிகள் ; z அவற்றைச் சார்ந்த மாறி.

$u_1, u_2, \ldots\ldots\ldots, u_n$ என்பவை, $x_1, x_2, \ldots x_n$, z என்ற $(n+1)$ மாறிகள் தொடர்புடைய, n சார்புகள்.

$$\varphi\ (u_1, u_2, \ldots, u_n)=0 \qquad \ldots(1)$$

என்பது ஒரு சார்பு.

முன் 12·3-ல் கூறிய முறையை விரிவு படுத்தி, 'φ'ஐ நீக்கினல்,

$$P_1\,\frac{\delta z}{\delta x_1} + P_2\,\frac{\delta z}{\delta x_2} + \ldots\ldots + P_n\,\frac{\delta z}{\delta x_n} = R \qquad \ldots(2)$$

என்ற அமைப்பில் ஒரு முதல் வரிசை, பகுதி வகைக்கெழுச் சமன்பாடு வரும். மேலும் $u_1=c_1$; $u_2=c_2$;.........; $u_n=c_n$ என்ற சார்புகளினின்று $c_1, c_2, \ldots\ldots\ldots, c_n$ என்ற மாறிலிகளை நீக்கினல், முன்னர் 12·71-ல் கூறிய முறைப்படி,

$$\frac{dx_1}{P_1} = \frac{dx_2}{P_2} = \frac{dx_3}{P_3} = \ldots\ldots = \frac{dx_n}{P_n} = \frac{dz}{R} \qquad \ldots(3)$$

என்ற சமன்பாடு வரும்.

எனவே பின்வரும் விதியை நாம் பெறலாம் : (2) எனப்பட்ட, பகுதி வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் பொது அமைப்பிலுள்ள தீர்வு காண வேண்டுமாயின், (3) எனப்பட்ட துணைச் சமன்பாடுகளை எழுதி, n சார்பற்ற தொகைகள் (தீர்வுகள்) காண்க. அவை $u_1=c_1$; $u_2=c_2$;.........; $u_n=c_n$ என இருக்கட்டும். அப்பொழுது,

$\varphi(u_1, u_2, \ldots\ldots, u_n)=0$ என்ற தொடர்பு (2) என்ற சமன் பாட்டின் பொது அமைப்புத் தீர்வாகும்; φ என்பது நாம் தன்னிச்சையாகக் கொள்ளக்கூடிய ஒரு தொடர்பாகும்.

இப்பொழுது (2) என்ற சமன்பாட்டுக்கு $u=c$ ஒரு தொகைத் தீர்வு எனக் கொள்வோம். அப்பொழுது

$$\frac{\delta z}{\delta x_i} = -\frac{\dfrac{\delta u}{\delta x_i}}{\dfrac{\delta u}{\delta z}} \quad (i = 1, 2, \ldots\ldots, n)$$

என்பது நமக்குத் தெரியும். எனவே நாம் (2) என்ற சமன் பாட்டுக்கு மாற்றிணையாக,

$$P_1 \frac{\delta u}{\delta x_1} + P_2 \frac{\delta u}{\delta x_2} + \ldots\ldots + P_n \frac{\delta u}{\delta x_n} + R \frac{\delta u}{\delta z} = 0 \ \ldots(4)$$

சமன்பாட்டைக் கொள்ளலாம்.

எனவே $u=c$ என்பது (2)-க்குத் தீர்வானல், அது (4)-க்கும் தீர்வாகிறது.

12-7·21 : எ.கா. 1

$x \frac{\delta u}{\delta x} + y \frac{\delta u}{\delta y} + z \frac{\delta u}{\delta z} = x y z$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வு காண்க.

இதற்குத் துணைச் சமன்பாடுகள்

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z} = \frac{du}{xyz}$$

$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y}$ என்ற இரண்டை எடுத்தால்

$y=A x$ என்ற தீர்வு வரும்.

அவ்வாறே $\frac{dy}{y} = \frac{dz}{z}$ என்ற இரண்டை எடுத்தால்

$z= By$ என வரும்.

இப்பொழுது

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z} = \frac{du}{xyz} = \frac{yz\,dx+zx\,dy+xy\,dz-3\,du}{xyz+xyz+xyz-3\,xyz}$$

$$= \frac{d\,(xyz)-3du}{0}$$

$\therefore \quad d\,(xyz)-3\,du=0.$

$\therefore \quad xyz-3u=c$ என ஒரு தீர்வு வரும்.

$\therefore \quad \varphi\left[\frac{y}{x}, \frac{z}{y}, xyz-3\,u\right] = K$ என்பது ஒரு பொது அமைப்பிலுள்ள தீர்வாகும். இதை

$xyz - 3u = \varphi_1\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{y}\right)$ எனவும் எழுதலாம்.

பயிற்சி 12·3

பின்வரும் சமன்பாடுகளின் தீர்வு காண்க :

(1) $$(x_3+x_3+z)\frac{\delta z}{\delta x_1} + (x_3+x_1+z)\frac{\delta z}{\delta x_2} + (x_1+x_2+z)\frac{\delta z}{\delta x_3} = x_1+x_2+x_3.$$

(2) $$x_1\frac{\delta z}{\delta x_1} + x_2\frac{\delta z}{\delta x_2} + x_3\frac{\delta z}{\delta x_3} = nz.$$

(3) $$x_2\,x_3\,z\frac{\delta z}{\delta x_1} + x_3\,x_1\,z\frac{\delta z}{\delta x_2} + x_1\,x_2\,z\frac{\delta z}{\delta x_3} = x_1\,x_2 x_3.$$

விடை. 12·3

(1) $S \equiv z+x_1+x_2+x_3$

$$\varphi\,[\,(z-x_1)\,S^{\frac{1}{3}}, (z-x_2)\,S^{\frac{1}{3}}, (z-x_3)\,S^{\frac{1}{3}}\,]=0$$

(2) $$\varphi\left[\frac{x_1^{\,n}}{z}, \frac{x_2^{\,n}}{z}, \frac{x_3^{\,n}}{z}\right] = 0$$

(3) $$\varphi\left[x_1^{\,2}-z^2, x_2^{\,2}-z^2, x_3^{\,2}-z^2\right] = 0$$

12-8 : $Pp+Qq=R$ என்ற பகுதி வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் வடிவ கணிதப் பொருள்

முன்பு **11·82**-ல்,

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R}$$

என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வுகளுக்குரிய வளை கோடுகளும்

$$P\,dx+Q\,dy+R\,dz=0 \qquad \ldots(2)$$

என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வுக்குரிய பரப்புகளும் ஒன்றுக்கொன்று செங்கோணச் சாய்வில் உள்ளனவென நிறுவினோம்.

(1)-ன் தீர்வுகள் $u\,(x, y, z)=a$ எனவும்,

$v\,(x, y, z)=b$ எனவும்

கொள்ளுவோம்; இரண்டும் ஒன்றுக்கொன்று தொடர்பற்றவை.

'a' என்ற 'ஏதாமொரு' மாறிலி (arbitrary constant) a_1 என்ற ஒரு குறிப்பிட்ட மதிப்பையேற்றால் $u=a_1$ என்ற பரப்பு, $v=b$ என்ற எண்ணற்ற (ஒரு கந்தழி) பரப்புகளை எண்ணற்ற வளை கோடுகளில் வெட்டுகிறது; ஏனெனில் $\underline{b}$ என்பதற்குரிய ஒவ்வொரு மதிப்புக்கும் ஒரு பரப்புண்டு ; அவை $u=a_1$ என்ற குறிப்பிட்ட பரப்பினை எண்ணற்ற வளைகோடுகளில் வெட்டும்.

எனவே, $u=a_1$ என்ற ஒரு குறிப்பிட்ட பரப்பின் மேல் (வெட்டும்) வளைகோடுகள் எல்லாம் அமைந்திருக்கும். இவ்வளை கோடுகள் யாவும் (2) என்ற சமன்பாட்டிற்குரிய தீர்வின் பரப்புகளுக்குச் செங்கோணச் சாய்விலிருக்கும்.

ஆனால் $Pp+Qq=R$

என்ற பகுதி வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டிற்கு

$$f\,(u, v)=0$$

என்ற 'தன்னிச்சை' யான சார்புகள் தீர்வுகளாகும் என நமக்குத் தெரியும் ; u, v என்பவை **(1)**-ன் தீர்வுகளெனவும் நமக்குத் தெரியும். எனவே (3)-ன் ஒவ்வொரு தீர்வும் — எந்தவொரு தீர்வும் — அதாவது தீர்வுக்குரிய பரப்பு, (2)-ன் தீர்வுக்கான பரப்புகளுக்குச் செங்கோணச் சாய்விலுள்ள வளைகோடுகளைத் தன்னகத்தே

தாங்கியிருக்கும். எனவே (2)-ன் தீர்வுக்குரிய பரப்புகளும் (3)-ன் தீர்வுக்குரிய பரப்புகளும் செங்கோணச் சாய்விலிருக்குமெனப் பெறப்படுகிறது. அதாவது,

$$P\,dx+Q\,dy+R\,dz=0$$

$$P\,p+Q\,q=R$$

என்ற இரு சமன்பாடுகளின் தீர்வுக்குரிய பரப்புகள் செங்கோணச் சாய்விலிருக்கும் என்பது நிறுவப்படுகிறது.

13. பகுதி வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகள்–திட்டமான அமைப்புகள்–தீர்வு காண் முறைகள்

(Partial differential Equations—Standard forms—Methods of solution)

சில திட்டமான அமைப்புகளில் தோன்றும் பகுதி வகைக் கெழுச் சமன்பாடுகளின் தீர்வு காண்பது மிக எளிதான முறையில் அமையும். முதலில் அவற்றினை நாம் பார்ப்போம்.

13-1 : அமைப்பு I : p, q மட்டும் தோன்றும் சமன்பாடுகள்

பொதுவாக இவை $F(p, q)=0$ என்ற அமைப்பில் இருக்கும். $F(a, b)=0$ என்ற சமன்பாட்டிற்குரிய இரு கணியங்கள் a, b பெற முடியுமாயின் முழுத் தீர்வு $z=ax+by+c$ என அமையும். b என்பது a ஐச் சார்ந்திருக்கும்; அதாவது $b=f(a)$ என்ற வகையில் $F(a, b)=0$ என்பது உண்மையாகும். எனவே முழுத் தீர்வினை $z=ax+y\,f(a)+c$ என எழுதலாம்.

குறிப்பு: இந்தத் திட்டமான அமைப்பில் நேரடியாக இல்லாத சில சமன்பாடுகள் கூட, (மாறிகளைச் சற்று வசதியாக மாற்றுவதால்) இத்திட்டமான உருவில் அமைக்கப்படலாம். பொது விதிகள் என வகுக்க முடியாது; கணக்கிற்கேற்றவாறு மாறுதல் செய்து கொள்ள வேண்டும்.

13-1·1 : எ.கா. (1) : $pq=c$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வு காண்க.

$ab=c$ எனக் கொண்டால், $b=\dfrac{c}{a}$ என வரும். இச்சமன்

பாட்டின் தீர்வு, $z=ax+\frac{c}{a}y+K$ என எழுதலாம். c என்பது கணக்கில் கொடுக்கப்பட்ட திட்டமான மாறிலி; K தொகை பெறுங்கால் பெறப்படும் ஏதாமொரு மாறிலி.

முழுத் தீர்வு : $z=ax+\frac{c}{a}y+K$

தனிச் சிறப்புத் தீர்வு காண்போம்.

$$\varphi \equiv z-ax-\frac{c}{a}y-K=0 \qquad \text{...(1)}$$

$$\frac{\delta\varphi}{\delta a} \equiv -x+\frac{c}{a^2}y=0 \qquad \text{...(2)}$$

$$\frac{\delta\varphi}{\delta k} \equiv -1 \qquad =0 \qquad \text{...(3)}$$

(3) ஒரு பொருந்தாத் தொடர்பாதலால், தனிச் சிறப்புத் தீர்வு இல்லை.

பொதுத் தீர்வு :

$$\varphi \equiv z-ax-\frac{c}{a}y+f(a)=0 \qquad \text{...(4)}$$

$$\frac{\delta\varphi}{\delta a} \equiv -x+\frac{c}{a^2}y+f'(a)=0 \qquad \text{...(5)}$$

(4), (5) கொண்டு 'a' ஐ நீக்கினல் பொதுத் தீர்வு பெறலாம். இங்கு $f(a)$ என்பது நாம் ஏற்றுக் கொள்ளும் சார்பு.

பயிற்சி : இங்கு $f(a)=a$ எனவும், பின்பு $f(a)=\frac{-c}{a}$ எனவும் ஏற்று, பொதுத் தீர்வு காண்க.

எ. கா. (2) : $x^2p^2+y^2q^2=z$ என்ற சமன்பாட்டைத் தீர்க்கவும்.

இங்கு $X=\log x$,

$Y=\log y$,

$Z=2\sqrt{z}$ என்று ஈடு செய்வோம்.

இப்பொழுது $P = \frac{\delta Z}{\delta X}$ எனவும், $Q = \frac{\delta Z}{\delta Y}$ எனவும் கொள்வோம்.

$$P = \frac{\delta Z}{\delta X} = \frac{\delta Z}{\delta x} \frac{dx}{dX}$$

$$= \frac{\delta Z}{\delta z} \frac{\delta z}{\delta x} \frac{dx}{dX} = \frac{px}{\sqrt{z}}$$ எனவும்,

$$Q = \frac{\delta Z}{\delta Y} = \frac{\delta Z}{\delta Y} \frac{dy}{dY}$$

$$= \frac{dZ}{dz} \frac{\delta z}{\delta y} \frac{dy}{dY} = \frac{qy}{\sqrt{z}}$$ எனவும் பெறலாம்.

$\therefore x^2p^2+y^2q^2=z$ என்ற சமன்பாடு

$P^2+Q^2=1$ என்ற அமைப்பில் வரும்.

இதன் தீர்வு, $Z=aX+bY+c$ $[a^2+b^2=1$ என்ற கட்டுப்பாட்டில்$]$

$\therefore 4z=(a \log x+b \log y+c)^2$ என வரும்.

முழுத் தீர்வு, $z = \frac{1}{4}(a \log x+b \log y+c)^2$

$$= \frac{1}{4}\left[a \log x \pm \sqrt{1-a^2} \log y+c\right]^2$$

தனிச் சிறப்புத் தீர்வு ;

$$\varphi = z - \frac{1}{4}\left(a \log x \pm \sqrt{1-a^2} \log y+c\right)^2 = 0$$

$$\frac{\delta\varphi}{\delta a} = -\sqrt{z}\left(\log x \mp \frac{a}{\sqrt{1-a^2}} \log y\right) = 0$$

$$\frac{\delta\varphi}{\delta c} = -\sqrt{z} = 0$$

எனவே தனிச் சிறப்புத் தீர்வு $z=0$

பொதுத் தீர்வு காணல் :

$$\varphi \equiv z - \frac{1}{4}\left[a \log x \pm \sqrt{1-a^2} \log y + f(a)\right]^2$$ என ஏற்று

$\frac{\delta \varphi}{\delta a}$ -ன் மதிப்பு கண்டு இரண்டிற்குமிடையே 'a' நீக்கிப் பெறுக.

13-1·3 : எ.கா. (3) :

$pq = x^m y^n z^{2l}$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வு காண்க.

இதை $\frac{pz^{-l}}{x^m} \cdot \frac{qz^{-l}}{y^n} = 1$ என எழுதுவோம்.

$$Z = \frac{z^{1-l}}{1-l}$$

$$X = \frac{x^{m+1}}{m+1}$$

$$Y = \frac{y^{n+1}}{n+1}$$ என ஈடு செய்வோம்.

அப்பொழுது,

$$P = \frac{\delta Z}{\delta X} = \frac{dZ}{dz} \quad \frac{\delta z}{\delta x} \quad \frac{dx}{dX}$$

$$= z^{-l} \cdot p \cdot \frac{1}{x^m}$$

$$Q = \frac{\delta Z}{\delta Y} = \frac{dZ}{dz} \quad \frac{\delta z}{\delta y} \quad \frac{dy}{dY}$$

$$= z^{-l}\, q\, \frac{1}{y^m}$$

∴ கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடு,

$PQ = 1$ என வரும்.

இதன் தீர்வு, $Z = aX + \frac{1}{a} Y + b$

எனவே முழுத் தீர்வு,

$$\frac{z^{1-l}}{1-l} = \frac{ax^{m+1}}{m+1} + \frac{y^{n+1}}{a\,(n+1)} + b$$

தனிச் சிறப்புத் தீர்வு காண, $\frac{\delta\varphi}{\delta b} = 0$ என்ற தொடர்பு $1=0$ என்ற ஒரு பொருந்தாத் தொடர்பினைத் தருவதால், தனிச் சிறப்புத் தீர்வு இல்லை.

முழுத் தீர்வில், $b=f(a)$ எனக் கொண்டு,

$\frac{\delta\varphi}{\delta a} = 0$ என்ற தொடர்போடு,

$$\frac{z^{1-i}}{1-l} = \frac{ax^{m+1}}{m+1} + \frac{y^{n+1}}{a(n+1)} + f(a)$$ என்பதையும்

கொண்டு 'a' நீக்கிப் பெறலாம்; $f(a)$ என்பதை நாம் விருப்பப்படி எடுத்துக் கொள்ளலாம்.

பயிற்சி 13·1

அமைப்பு I என்ற வகையில் கொண்டு, பின்வரும் சமன்பாடுகளின் தீர்வு காண்க.

(1) $p^2-q^2=1$

(2) $p^2+q^2=16$

(3) $p+q+pq=0$

(4) $q\,e^{p/a} = 1$

(5) $p^2+q^2=n\,pq$

(6) $p=q^2$

(7) $p^2+p=q^2$

விடை 13·1

(1) முழுத் தீர்வு: $z = ax \pm (a^2-1)^{\frac{1}{2}}\, y+b$

இதையே $z=x \sec\alpha \pm y \tan\alpha+b$ எனவும் எழுதலாம்.

(இங்கு α, b—எவையேனுமிரு மாறிலிகள்) தனிச் சிறப்புத் தீர்வு இல்லை.

பொதுத் தீர்வு காண $b=\varphi(a)$ எனக் கொண்டு முறைப்படி பெறலாம்.

(2) முழுத் தீர்வு : $z=ax+\sqrt{16-a^2}\ y+b$

தனிச் சிறப்புத் தீர்வில்லை.

(3) முழுத் தீர்வு : $z=ax+by+c$; ஆனால் $ab+a+b=0$ என்ற கட்டுப்பாடுண்டு.

$z=ax-\dfrac{a}{a+1}\ y+c$ எனவும் எழுதலாம்.

தனிச் சிறப்புத் தீர்வில்லை.

(4) $z=mx+y\ e^{\frac{-m}{a}}+c$

(5) $z=ax+\dfrac{2a}{n\pm\sqrt{n^2-4}}\ y+c$

(6) $z=b^2x+by+c$

(7) $z=ax+by+c$

$b^2=a^3+a.$

13-2 : அமைப்பு II

$z=px+qy=f(p,\ q)$ என்ற அமைப்பு: முழுத் தீர்வு $z=ax+by+f(a,\ b)$ என்பதுதான் என்று தெளிவாய்த் தெரிகிறது.

தனிச் சிறப்புத் தீர்வு காண,

$\varphi\equiv ax+by+f(a,\ b)-z=0$ எனவும்,

$\dfrac{\delta\varphi}{\delta a}\equiv x+\dfrac{\delta f}{\delta a}=0$ எனவும்,

$\dfrac{\delta\varphi}{\delta b}\equiv y+\dfrac{\delta f}{\delta b}=0$ எனவும்

கொண்டு, இம் மூன்றிற்குமிடையே $a,\ b$ இரண்டையும் நீக்கிப் பெறும் நீக்குறு, தனிச் சிறப்புத் தீர்வைத் தரும்.

பொதுத் தீர்வு காண,

$\varphi\equiv ax+\phi(a)\ y+f[a,\ \phi(a)]-z=0$ எனவும்,

$\dfrac{\delta\varphi}{\delta a}\equiv x+y\ \phi'(a)+\dfrac{df}{da}=0$ எனவும்

கொண்டு இவ்விரண்டுக்குமிடையே, 'a' ஐ நீக்கிப் பெறும் நீக்குறு, பொதுத் தீர்வினைத் தரும்.

13-2·1 : எ. கா. (1)

$z=px+qy+p^2+q^2$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வு காண்க.

முழுத் தீர்வு, $z=ax+by+a^2+b^2$

தனிச் சிறப்புத் தீர்வு காண்போம் :

$$\varphi \equiv ax+by+a^2+b^2-z=0$$

$$\frac{\delta\varphi}{\delta a} \equiv x+2a=0$$

$$\frac{\delta\varphi}{\delta b} \equiv y+2b=0$$

இம் மூன்றிற்குமிடையே, a, b ஐ நீக்க,

$$-\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{2}+\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{4}-z=0$$

அல்லது $4z+x^2+y^2=0$ என வரும்.

இதுவே தனிச் சிறப்புத் தீர்வாகும்.

$a=b$ எனக் கொண்டு பொதுத் தீர்வு காண்போம் :

$$\varphi \equiv ax+ay+2a^2-z=0$$

$$\frac{\delta\varphi}{\delta a} \equiv x+y+4a=0$$

இரண்டிற்குமிடையே 'a'ஐ நீக்க,

$$-\frac{(x+y)}{4}(x+y)+2\left(\frac{x+y}{4}\right)^2-z=0$$

அதாவது $8z+(x+y)^2=0$

என்பது $a=b$ என்பதற்குப் பொருத்தமான பொதுத் தீர்வாகும்.

எ. கா. (2) :

$z=px+qy+(lp^2+mq^2+n)^{\frac{1}{2}}$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வு காண்க.

திட்ட அமைப்பின்படி,

முழுத் தீர்வு : $z = ax + by + (la^2 + mb^2 + n)^{\frac{1}{2}}$

தனிச் சிறப்புத் தீர்வு காண்போம்.

$$\frac{\delta\varphi}{\delta a} \equiv x + \frac{la}{\sqrt{la^2+mb^2+n}} = 0 \qquad \text{...(2)}$$

$$\frac{\delta\varphi}{\delta b} \equiv y + \frac{mb}{\sqrt{la^2+mb^2+n}} = 0 \qquad \text{...(3)}$$

(1), (2), (3) என்பவற்றிற்கிடையே a, b நீக்கப்பட வேண்டும்.

(2)-லிருந்து $\frac{la}{x} = -\sqrt{la^2+mb^2+n}$

$$\frac{mb}{y} = -\sqrt{la^2+mb^2+n}$$

$$\therefore \quad \frac{la}{x} = \frac{mb}{y} = -\sqrt{la^2+mb^2+n}$$

$$\therefore \quad \frac{l^2a^2}{x^2} = \frac{m^2b^2}{y^2} = \frac{la^2+mb^2+n}{1}$$

$$\frac{la^2}{x^2/l} = \frac{mb^2}{y^2/m} = \frac{la^2+mb^2+n}{1}$$

$$= \frac{la^2+mb^2}{\frac{x^2}{l}+\frac{y^2}{m}}$$

$$= \frac{la^2+mb^2+n-la^2-mb^2}{1-\frac{x^2}{l}-\frac{y^2}{m}}$$

$$= \frac{n}{1-\frac{x^2}{l}-\frac{y^2}{m}}$$

$R^2 = 1 - \frac{x^2}{l} - \frac{y^2}{m}$ எனக் கொள்வோம்.

$$\therefore \quad \frac{la}{x} = \frac{mb}{y} = -\sqrt{la^2+mb^2+n} = \frac{\sqrt{n}}{R}$$

$$\therefore \quad a = \frac{x\sqrt{n}}{Rl}$$

$$\therefore \quad b = \frac{y\sqrt{n}}{Rm}$$

$$\sqrt{la^2+mb^2+n} = -\frac{\sqrt{n}}{R}$$

இந்த மதிப்புகளை (1)-ல் ஈடு செய்தால்

$$z = \frac{x^2\sqrt{n}}{Rl} + \frac{y^2\sqrt{n}}{Rm} - \frac{\sqrt{n}}{R}$$

$$= \frac{\sqrt{n}}{R}\left[\frac{x^2}{l} + \frac{y^2}{m} - 1\right]$$ என்பது

தனிச் சிறப்புத் தீர்வாகக் கிடைக்கும்.

அதாவது

$$z = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{1-\frac{x^2}{l}-\frac{y^2}{m}}}\left[\frac{x^2}{l} + \frac{y^2}{m} - 1\right]$$

$$= \frac{-\sqrt{n}\left(1-\frac{x^2}{l}-\frac{y^2}{m}\right)}{\sqrt{1-\frac{x^2}{l}-\frac{y^2}{m}}}$$

$$= -\sqrt{n\left(1-\frac{x^2}{l}-\frac{y^2}{m}\right)}$$

அல்லது $z^2 = n\left(1-\frac{x^2}{l}-\frac{y^2}{m}\right)$

என்பதைத் தனிச் சிறப்புத் தீர்வாகக் கொள்ளலாம்.

சரி பார்த்தல் : இரு பக்கங்களுக்கும், x, y ஒட்டி, பகுதி வகைக்கெழு காண,

$$2\,zp = -\frac{2\,nx}{l}$$

$$p = -\frac{nx}{lz} \text{ எனவும்,}$$

$$2\,zq = -\frac{2\,ny}{m}$$

$$\therefore\quad q = -\frac{ny}{mz} \text{ எனவும் வரும்.}$$

இப்பொழுது இம்மதிப்புகளை ஈடு செய்து, சமன்பாடு சரிபடுத்தப் படுகிறதாவெனப் பார்ப்போம்.

$$px + qy + (lp^2 + mq^2 + n)^{\frac{1}{2}}$$

$$= -\frac{nx^2}{lz} - \frac{ny^2}{mz} + \sqrt{\frac{n^2x^2}{lz^2} + \frac{n^2y^2}{mz^2} + n}$$

$$= -\frac{nx^2}{lz} - \frac{n\,y^2}{mz} + \sqrt{\frac{mn^2x^2 + ln^2y^2 + lmnz^2}{lmz^2}}$$

$$= -\frac{nx^2}{lz} - \frac{ny^2}{mz} + \frac{n}{z}\sqrt{\frac{mx^2 + ly^2 + z^2\frac{lm}{n}}{lm}}$$

$$= \frac{n}{z}\left[-\frac{x^2}{l} - \frac{y^2}{m} + \sqrt{\frac{x^2}{l} + \frac{y^2}{m} + \frac{z^2}{n}}\right]$$

$$= \frac{n}{z}\left[-\frac{x^2}{l} - \frac{y^2}{m} + \sqrt{\frac{x^2}{l} + \frac{y^2}{m} + \left(1 - \frac{x^2}{l} - \frac{y^2}{m}\right)}\right]$$

$$= \frac{n}{z}\left[-\frac{x^2}{l} - \frac{y^2}{m} + 1\right]$$

$$= \frac{n}{z} \cdot \frac{z^2}{n} = z.$$

எனவே தனிச் சிறப்புத் தீர்வு பொருந்துவது காண்க.

பயிற்சி 13·2

அமைப்பு II என்ற வகையில் கொண்டு, பின்வரும் சமன்பாடு களின் தீர்வு காண்க.

(1) $z=px+qy+2\sqrt{pq}$

(2) $z=px+qy+pq$

(3) $z=px+qy+(1+p^2+q^2)^{\frac{1}{2}}$

(4) $z=px+qy+3\,(pq)^{\frac{1}{3}}$

(5) $z=px+qy+p^2+pq+q^2$

(6) $z-c=(x-a)\,p+(y-b)\,q$

(7) $xp^2+yq^2=(z-2px-2qy)^2$

விடை 13·2

மு. தீ.=முழுத் தீர்வு; த.சி.தீ.=தனிச் சிறப்புத் தீர்வு என்ற குறியீடுகளை ஏற்றுக் கொள்க.

(1) $z=ax+by+2\sqrt{ab}$; த.சி.தீ. இல்லை.

(2) $z=ax+by+ab$ (மு.தீ.)
$z=-xy$ (த.சி.தீ.)

(3) $z=a+by+(1+a^2+b^2)^{\frac{1}{2}}$ (மு.தீ.)
$x^2+y^2+z^2=1$ (த.சி.தீ.)

(4) $z=ax+by+3\,(ab)^{\frac{1}{3}}$ (மு.தீ.)
$xyz=1$ (த.சி.தீ.)

(5) $z=ax+by+a^2+ab+b^2$ (மு.தீ.)
$3z=xy-x^2-y^2$ (த.சி.தீ.)

(6) $z-c=A\,(x-a)+B\,(y-b)$ (மு.தீ.)
த.சி.தீ. இல்லை,

(7) $z = a\sqrt{x} + b\sqrt{y} + \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$ (மு. தீ.);

த.சி.தீ. இல்லை.

13-3. : அமைப்பு III

x, y நேரடியாகத் தோன்ருமல், $f(p, q, z) = 0$ ...(1)

என்ற அமைப்பு

'a' என்ற ஏதாமொரு மாறிலி கொண்டு

$X = x + ay$ எனக் கொள்வோம்.

அப்பொழுது $p = \frac{dz}{dX} \cdot \frac{\delta X}{\delta x}$

$= \frac{dz}{dX}$ என வரும்.

$q = \frac{dz}{dX} \quad \frac{\delta X}{\delta y}$

$= a\frac{dz}{dX}$ என வரும்.

இவற்றினை (1)-ல் ஈடு செய்தால்,

$$f\left(\frac{dz}{dX},\ a\frac{dz}{dX},\ z\right) = 0 \quad ...(2)$$

என்ற சமன்பாடு வரும்.

இது z, X-ல் உள்ள சாதாரண வகைக்கெழுச் சமன்பாடாகையினுல்,

$\frac{dz}{dX} = \varphi(z, a)$ எனப் பெறலாம்.

$$\therefore \quad \frac{dz}{\varphi(z, a)} = dX$$

$$\therefore \quad \int \frac{dz}{\varphi(z, a)} = X + b$$

எனவே $x+ay+b = \int \frac{dz}{\varphi(z, a)}$

$= u(z)$ என வரும்.

இது முழுத் தீர்வாகும். தனிச் சிறப்புத் தீர்வும், பொதுத் தீர்வும் முன் கூறிய முறைப்படி காணலாம். பின்வரும் விதியை இவ்விதச் சமன்பாடுகளுக்கு நடை முறையில் பயன்படுத்தலாம்.

q-க்குப் பதிலாக $a\,\frac{dz}{dX}$ என ஈடு செய்து,

p-க்குப் பதிலாக $\frac{dz}{dX}$ என ஈடு செய்து சமன்பாட்டின் தீர்வு காண்க ; $X=x+ay$ என ஈடு செய்க.

13-3·1 : எ.கா. (1) :

$z^2(p^2+q^2+1)=c^2$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வு காண்க.

$X=x+ay$ எனக் கொள்க.

$$p = \frac{dz}{dX} \cdot \frac{\delta X}{\delta x} = \frac{dz}{dX}$$

$$q = \frac{dz}{dX} \cdot \frac{\delta X}{\delta y} = a\,\frac{dz}{dX}$$

$$\therefore \text{ சமன்பாடு, } z^2\left[\left(\frac{dz}{dX}\right)^2 + a^2\left(\frac{dz}{dX}\right)^2+1\right] = c^2$$

$$\therefore (a^2+1)\left(\frac{dz}{dX}\right)^2 + 1 = \frac{c^2}{z^2}$$

$$\therefore (a^2+1)\left(\frac{dz}{dX}\right)^2 = \frac{c^2-z^2}{z^2}$$

$$\therefore \frac{dz}{dX} = \frac{\sqrt{c^2-z^2}}{z\sqrt{a^2+1}}$$

$$\therefore \frac{z\,dz}{\sqrt{c^2-z^2}} = \frac{dX}{\sqrt{a^2+1}}$$

தொகை காண,

$$\sqrt{a^2+1}\int \frac{z\,dz}{\sqrt{c^2-z^2}} = \int dX+b$$

அதாவது,

$-\sqrt{a^2+1}\ \sqrt{c^2-z^2} = x+ay+b$ என வரும். இதையே $(a^2+1)\,(c^2-z^2)=(x+ay+b)^2$ என எழுதலாம். இதுவே முழுத் தீர்வாகும்.

தனிச் சிறப்புத் தீர்வு காணல் :

$\varphi \equiv (z^2-c^2)\,(a^2+1)+(x+ay+b)^2=0$ என எழுதினல்

$$\frac{\delta\varphi}{\delta a} \equiv 2a\,(z^2-c^2)+2y\,(x+ay+b)=0$$

$$\frac{\delta\varphi}{\delta b} \equiv 2\,(x+ay+b)=0$$

மேற்கூறிய மூன்று சமன்பாடுகளிலிருந்து a, b இரண்டையும் விலக்குவோம்.

$x+ay+b=0$ எனவும், $a=0$ எனவும் ஈடு செய்தால் நீக்குறுவாக,

$z^2-c^2=0$

அல்லது $z=\pm c$ என வருவதே தனிச் சிறப்புத் தீர்வாகும்.

பொதுத் தீர்வு காணல் :

$b=a$ எனக் கொள்வோம்.

$\varphi \equiv (z^2-c^2)\,(a^2+1)+(x+ay+a)^2=0$ என வரும்.

$\dfrac{\delta\varphi}{\delta a} \equiv 2a\,(z^2-c^2)+2\,(x+ay+a)\,(y+1)=0$ எனவும் பெற லாம்.

∴ இதிலிருந்து 'a' கண்டு, முதலில் உள்ள 'φ'-ல் ஈடு செய்தால், பொதுத் தீர்வு ஆகும்.

$a = \dfrac{-x\,(y+1)}{(z^2-c^2)+(y+1)^2}$ என வருவது காண்க.

13-3 2 : எ.கா. (2) :

$a(p+q)=z$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வு காண்க. எடுத்துக் காட்டு (1)-ல் ஈடு செய்த முறையைக் கையாள, $X=x+Ky$ என எடுத்துக் கொண்டால்,

$$a\left(\frac{dz}{dX}+K\frac{dz}{dX}\right)=z \text{ என வரும்.}$$

$$\therefore\quad (K+1)\frac{dz}{dX}=\frac{z}{a}$$

$$\therefore\quad \frac{dz}{z}=\frac{dX}{a(K+1)}$$

தொகை கண்டால்,

$\log z=\dfrac{x+Ky}{a(K+1)}+b$ என்ற முழுத் தீர்வு கிடைக்கும். இம் முழுத் தீர்வில் a என்பது கணக்கிலுள்ள மாறிலி ; b, K என்பவை தொகை காணும் வகையில் வரும் மாறிலிகள்.

தனிச் சிறப்புத் தீர்வு :

$$\varphi\equiv\log z-\frac{x+Ky+ab(K+1)}{a(K+1)}=0 \qquad \ldots(1)$$

$$\frac{\delta\varphi}{\delta b}\equiv-\frac{a(K+1)}{a(K+1)}=-1=0 \qquad \ldots(2)$$

$$\frac{\delta\varphi}{\delta K}\equiv \text{ஒரு தொடர்பு}=0 \qquad \ldots(3)$$

இங்கு (2) ஒரு பொருந்தாத் தொடர்பாகையால் தனிச் சிறப்புத் தீர்வு கிடையாது.

பொதுத் தீர்வு :

$K=1$ எனக் கொள்வோம்.

$$\varphi\equiv\log z-\frac{x+y+2ab}{2a}=0 \qquad \ldots(4)$$

$$\frac{\delta\varphi}{\delta b}\equiv-1=0. \qquad \ldots(5)$$

$K=1$-க்குப் பொதுத் தீர்வு பெற முடியாது. ஆனால் $K=F(b)$ எனக் கொண்டு பொதுத் தீர்வு காண இயலலாம்.

பயிற்சி 13·3

அமைப்பு III என்ற வகையில் பின்வரும் சமன்பாடுகளுக்குத் தீர்வு காண்க.

(1) $q^2y^2=z\,(z-px)$

(2) $pz=1+q^2$

(3) $p\,(1+q^2)=q\,(z+a)$

(4) $9\,(p^2z+q^2)+4$

(5) $4\,(z^3+1)=9\,pq\,z^4$

(6) $qz=1+p^2$

(7) $z^2\,(p^2+q^2+1)=1$

விடை 13·3

(1) $bxy^a = z\left(\dfrac{2a^2}{\sqrt{4a^2+1}-1}\right)$

(2) $z^2 \pm \left[\, z\,\sqrt{z^2-4a^2}-4a^2\log_e\left(z+\sqrt{z^2-4a^2}\right)\right]$
$=4\,(x+ay+b)$

(3) $4c\,(z+a)=(x+cy+b)^2+4$

(4) $(z+a^2)=(x+ay+c)^{2/3}$

(5) $a\,(1+z^3)=(x+ay+b)^2$ (மு.தீ.)
$z^3+1=0$ (த.சி.தீ.)

(6) $a^2z^2\pm az\,\sqrt{a^2z^2-4}\mp 4\log\left(az+\sqrt{a^2z^2-4}\right)$
$=4a\,(x+ay+b)$

(7) $(1+a^2)\,(1-z^2)=(x+ay+b)^2$ (மு.தீ.)
$z^2-1=0$ (த.சி.தீ.)

13-4 : அமைப்பு IV

$f_1(x, p) = f_2(y, q)$ **என்ற அமைப்பு ; z நேரடியாகத் தோன்றுவதில்லை.**

$f_1(x, p) = a = f_2(y, q)$ எனக் கொள்க ; a ஏதாமொரு மாறிலி. p, q தனித்தனியே காண இச் சமன்பாடுகளைப் பயன் படுத்துக. அப்பொழுது

$p = F_1(x, a)$ எனவும்,

$q = F_2(y, a)$ எனவும் வரும்.

தொகை கண்டால்,

$$z = \int F_1(x, a)\, dx + x\text{--சார்பற்ற ஒரு கோவை.}$$

$$z = \int F_2(y, a)\, dx + y\text{--சார்பற்ற ஒரு கோவை.}$$

எனவே,

$$z = \int F_1(x, a)\, dx + \int F_2(y, a)\, dy + b$$

என்ற முழுத் தீர்வு வரும். (ஏனெனில் a, b என்ற எவையேனுமிரு மாறிலிகள் உள்ளன). முறைப்படி, தனிச் சிறப்புத் தீர்வும் பொதுத் தீர்வும் காணலாம்.

13-4·1 :எ. கா. 1:

$p^2 + q^2 = x + y$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வு காண்க.

$p^2 - x = y - q^2 = a$ எனக் கொள்க.

$$\therefore\quad p = \sqrt{x+a}$$

$$q = \sqrt{y-a}$$

$$\therefore\quad \frac{\delta z}{\delta x} = \sqrt{x+a}\ ; \quad \frac{\delta z}{\delta y} = \sqrt{y-a}$$

$$\therefore\quad z = \frac{2}{3}(x+a)^{\frac{3}{2}} + x\text{--சார்பற்ற இராசிகள்}$$

$$z = \frac{2}{3}(y-a)^{\frac{3}{2}} + y\text{--சார்பற்ற இராசிகள்}$$

எனவே, $z = \frac{2}{3}(x+a)^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{3}(y-a)^{\frac{3}{2}} + b$ ...(1)

என்ற முழுத் தீர்வு கிடைக்கும்.

a, b என்ற இரண்டு 'எவையேனுமிரு' மாறிலிகள் இருப்பதால் இது முழுத் தீர்வாகிறது.

தனிச் சிறப்புத் தீர்வு :

$$\frac{\delta\varphi}{\delta b} \equiv 1 = 0 \qquad ...(2)$$

(2) ஒரு பொருந்தாத் தொடர்பு. எனவே தனிச் சிறப்புத் தீர்வு இல்லை. ($\frac{\delta\varphi}{\delta a}$ காணவேண்டிய தேவையில்லை.)

எ. கா. 2 :

$z^2 = (p^2+q^2) = x^2+y^2$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வு காண்க.

$Z = \frac{z^2}{2}$ எனக் கொள்க.

$$P = \frac{\delta Z}{\delta x} = \frac{dZ}{dz}\ \frac{\delta z}{\delta x} = zp$$

$$Q = \frac{\delta Z}{\delta y} = \frac{dZ}{dz}\ \frac{\delta z}{\delta y} = zq$$

$\therefore\ z^2\ (p^2+q^2) = P^2+Q^2 = x^2+y^2$

$\therefore\ P^2 - x^2 = y^2 - Q^2 = a^2$ எனக் கொள்க.

$P^2 = x^2+a^2$

$Q^2 = y^2-a^2$

$$\therefore\ P = \sqrt{x^2+a^2} = \frac{\delta Z}{\delta x}$$

$$Q = \sqrt{y^2-a^2} = \frac{\delta Z}{\delta y}$$

$$\therefore \quad Z = \int \sqrt{x^2+a^2}\, dx + x - \text{சார்பற்ற தொடர்பு}$$

$$Z = \int \sqrt{y^2-a^2}\, dy + y - \text{சார்பற்ற தொடர்பு}$$

$$\therefore \quad Z = \tfrac{1}{2} \left[x \sqrt{x^2+a^2} + a^2 \log\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)\right]$$

$$+ \tfrac{1}{2} \left[y \sqrt{y^2-a^2} - a^2 \log\left(y+\sqrt{y^2-a^2}\right)\right]$$

$+ b$ என்ற தீர்வு வரும்.

a, b என இரு 'எவையேனுமிரு' மாறிலிகள் வருவதால் இது முழுத் தீர்வாகும்.

$$\therefore \quad z^2 = \left[x \sqrt{x^2+a^2} + a^2 \log\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)\right]$$

$$+ \left[y \sqrt{x^2-a^2} - a^2 \log\left(y+\sqrt{y^2-a^2}\right)\right]$$

$+b$ என்பது கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டின் முழுத் தீர்வாகும்.

அதாவது, $z^2 = x \sqrt{x^2+a^2} + y\sqrt{y^2-a^2}$

$$+ a^2 \log\left[\frac{x+\sqrt{x^2+a^2}}{y+\sqrt{y^2-a^2}}\right]$$

$+b$ என எழுதலாம்.

இங்கு $\dfrac{\partial \varphi}{\partial b} \equiv 1 = 0$ என்ற ஒரு பொருந்தா முடிவு வருவதால் தனிச் சிறப்புத் தீர்வு இல்லை. ஆனால் $b = \varphi(a)$ எனக் கொண்டு பொதுத் தீர்வு காணலாம்.

பயிற்சி 13·4

அமைப்பு IV என்ற வகையில் பின்வரும் சமன்பாடுகளின் தீர்வு காண்க.

(1) $p - q = x - y$

(2) $q = 2yp^2$

(3) $p^2+q^2=x+y$

(4) $\sqrt{p}+\sqrt{q}=2x$

(5) $x^4p^2+y^2q=0$

(6) $yp-x^2q^2=x^2y$

(7) $q=xp+p^2$

(8) $p^2-y^3q=x^2-y^2$

விடை 13·4

(1) $2z=(x+a)^2+(y+a)^2+b$ (த.சி. தீர்வில்லை)

(2) $z=ax+a^2y^2+b$ (த.சி. தீர்வு இல்லை)

(3) $z=\frac{2}{3}(x+a)^{\frac{3}{2}}+\frac{2}{3}(y-a)^{\frac{3}{2}}+b$

(த.சி. தீர்வு இல்லை)

(4) $z=\frac{1}{6}(2x-a)^3+a^2y+b$ (த.சி. தீ. இல்லை.)

(5) $x^2(yz+a+by)^2+ay^2=0$

(6) $4(a-1)y^3=(3z-ax^3-b)^2$

(7) $4z=-x^2\pm[x\sqrt{x^2+4a^2}+4a^2\log(x+\sqrt{x^2+4a^2})]$
$+4a^2y+b.$

(8) $z=\log y-\frac{a^2}{2y^2}\pm\frac{1}{2}\Big[x\sqrt{x^2+a^2}+$
$+a^2\log(x+\sqrt{x^2+a^2})\Big]+b$

13–5. 'சார்ப்பி'-ன் பொது முறை-தீர்வு காணல்: (Charpit's general method of solution)

நான்கு திட்டமான அமைப்புகளில் உள்ள சமன்பாடுகளின் தீர்வு காணும் முறைகளையும், $Pp+Qq=R$ என்ற அமைப்பிலுள்ள

சமன்பாட்டின் தீர்வு காணும் முறையினையும் இதுவரை கண்டோம். ஆனால் பொதுவாக $F(x, y, z, p, q)=0$ ...(1) என்ற பொது அமைப்பிலுள்ள சமன்பாட்டின் தீர்வுகள், (ஒரு திட்டமான வகையிலல்லாமல்) காணும் முறை தேவைப்படுமல்லவா? சார்ப்பி* என்பவர் இதற்கென வகுத்த முறையொன்றினைப் பார்ப்போம்.

முன்னர் புத்தகம் I-ல் சாதாரண முதல் வரிசைச் சமன்பாடுகள் சிலவற்றினைத் தீர்க்க, கொடுக்கப்பட்ட வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டுடன் மற்றொரு மாற்றிணையான வகைக்கெழுச் சமன்பாடு பெற்று, இவ்விரண்டுக்குமிடையே, வகைக்கெழுவினை நீக்கி, தீர்வு காணும் முறை விளக்கப்பட்டது காண்க. ஏறக்குறைய அதே 'விலக்கல்' முறையைக் கையாண்டு, $F(x, y, z, p, q)=0$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வு காண்பதே சார்ப்பி முறையின் அடிப்படையாய் அமைகிறது.

13-5·1 : 'சார்ப்பி' முறை—தீர்வு காணல்

கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடு

$$F(x, y, z, p, q)=0 \quad ...(1)$$

எனக் கொள்க.

$$dz = \frac{\delta z}{\delta x} dx + \frac{\delta z}{\delta y} dy$$ ஆதலால்,

$$dz = p\, dx + q\, dy \quad ...(2)$$

என்ற தொடர்பு நமக்குத் தெரியும்.

இப்பொழுது, (1)ஐப் பயன்படுத்தி

$$f(x, y, z, p, q)=0 \quad ...(3)$$

என்ற மற்றொரு தொடர்பு நாம் கண்டுவிட முடியுமானால்,

(1), (2), (3) என்பவற்றிற்கிடையே p, q இரண்டையும் நீக்க இயலும்; ஏனெனில் (1), (3)-லிருந்து p, q ஐ நாம் கண்டு) (2)-ல் ஈடு செய்து பார்க்கலாம். அப்படிப் பெறப்படும் சாதாரண சமன்பாட்டின் தீர்வே, நாம் காண வேண்டிய தீர்வாகும்.

---

* சார்ப்பி (Charpit) ஒரு பிரஞ்சு நாட்டுக் கணித மேதை. அவர் இந்த முறையை, பாரிஸ் விஞ்ஞான மன்றத்தின் முன் விளக்கிவிட்டு, சிறிது காலத்தில் காலமானார். ஒருவாறாக இம் முறையை இலகிரான்ஜ் அறிந்திருந்தாராயினும், சார்ப்பி அம்முறையைச் செப்பனிட்டுத் தந்தார்.

இப்பொழுது (3) என்ற மற்ருெரு சமன்பாடு காணும் முறை வகுக்கப்பட வேண்டும், (3) என்ற தெரியாத தொடர்பையேற் போம் ; (1)-ம் (3)-ம் சேர்ந்து, p, q என்ற மதிப்புகளைத் தர வேண்டும் ; இம் மதிப்புகள் (2) என்ற சமன்பாட்டின் தொகை காணும் வகையில் அமைய வேண்டும். இதுவே இப்பொழுது நமது நோக்கமாகும். x, y ஒட்டி, (1), (3) என்பவற்றின் பகுதி வகைக் கெழுக்கள் காண்போம் :

$$\frac{\delta F}{\delta x} + \frac{\delta F}{\delta z} p + \frac{\delta F}{\delta p} \frac{\delta p}{\delta x} + \frac{\delta F}{\delta q} \frac{\delta q}{\delta x} = 0 \qquad ...(4)$$

$$\frac{\delta f}{\delta x} + \frac{\delta f}{\delta z} p + \frac{\delta f}{\delta p} \frac{\delta p}{\delta x} + \frac{\delta f}{\delta q} \frac{\delta q}{\delta x} = 0 \qquad ...(5)$$

$$\frac{\delta F}{\delta y} + \frac{\delta F}{\delta z} q + \frac{\delta F}{\delta p} \frac{\delta p}{\delta y} + \frac{\delta F}{\delta q} \frac{\delta q}{\delta y} = 0 \qquad ...(6)$$

$$\frac{\delta f}{\delta y} + \frac{\delta f}{\delta z} q + \frac{\delta f}{\delta p} \frac{\delta p}{\delta y} + \frac{\delta f}{\delta q} \frac{\delta q}{\delta y} = 0 \qquad ...(7)$$

(4), (5)-க்கு இடையே $\frac{\delta p}{\delta x}$ ஐ விலக்குக.

(6), (7)-க்கு இடையே $\frac{\delta q}{\delta y}$ ஐ விலக்குக.

$$\left(\frac{\delta F}{\delta x} \frac{\delta f}{\delta p} - \frac{\delta F}{\delta p} \frac{\delta f}{\delta x}\right) + p\left(\frac{\delta F}{\delta z} \frac{\delta f}{\delta p} - \frac{\delta F}{\delta p} \frac{\delta f}{\delta z}\right)$$

$$+ \frac{\delta q}{\delta x}\left(\frac{\delta F}{\delta q} \frac{\delta f}{\delta p} - \frac{\delta F}{\delta p} \frac{\delta f}{\delta q}\right) = 0 \qquad ...(8)$$

$$\left(\frac{\delta F}{\delta y} \frac{\delta f}{\delta q} - \frac{\delta F}{\delta q} \frac{\delta f}{\delta y}\right) + q\left(\frac{\delta F}{\delta z} \frac{\delta f}{\delta q} - \frac{\delta F}{\delta q} \frac{\delta f}{\delta z}\right)$$

$$+ \frac{\delta p}{\delta y}\left(\frac{\delta F}{\delta p} \frac{\delta f}{\delta q} - \frac{\delta F}{\delta q} \frac{\delta f}{\delta p}\right) = 0 \qquad ...(9)$$

$\frac{\delta q}{\delta x} = \frac{\delta^2 z}{\delta x\, \delta y} = \frac{\delta p}{\delta y}$ என்ற உண்மையையொட்டி,

(8), (9) இரண்டையும் கூட்டினல், (8)-ல் மூன்ருவது உறுப்பும், (9)-ல் மூன்ருவது உறுப்பும் சேர்ந்து பூச்சியமாகும். மற்ற உறுப்புகளின் கூட்டுத் தொகையாக

$$\left(\frac{\delta F}{\delta x} + p \frac{\delta F}{\delta z}\right)\frac{\delta f}{\delta p} + \left(\frac{\delta F}{\delta y} + q \frac{\delta F}{\delta z}\right)\frac{\delta f}{\delta q}$$

$$+ \left(-p\frac{\delta F}{\delta p} - q\frac{\delta F}{\delta q}\right)\frac{\delta f}{\delta z} + \left(-\frac{\delta F}{\delta p}\right)\frac{\delta f}{\delta x}$$

$$+ \left(-\frac{\delta F}{\delta q}\right)\frac{\delta f}{\delta y} = 0 \qquad \text{...(10)}$$

என வரும்.

இது ஒரு முதல் வரிசைச் சமன்பாடு ; இதன் தீர்வு நாம் துணைச் சமன்பாடாகக் கொண்ட (3) என்ற சமன்பாட்டினுக்கும் பொருந்தும். எனவே 'f' ஐ (10)-லிருந்து பெறலாம். (10) என்பது ஓர் ஒரு வரிசைச் சமன்பாடு ; அமைப்பு,

$$P\frac{\delta f}{\delta p} + Q\frac{\delta f}{\delta q} + R\frac{\delta f}{\delta z} + S\frac{\delta f}{\delta x} + T\frac{\delta f}{\delta y} = R_1 \ (=0)$$

∴ 12·72-ல் கண்டபடி, இதற்கு மாற்றிணையான சமன்பாடு,

$$\frac{dp}{\frac{\delta F}{\delta x} + p\frac{\delta F}{\delta z}} = \frac{dq}{\frac{\delta F}{\delta y} + q\frac{\delta F}{\delta z}} = \frac{dz}{-p\frac{\delta F}{\delta p} - q\frac{\delta F}{\delta q}}$$

$$= \frac{dx}{-\frac{\delta F}{\delta p}} = \frac{dy}{-\frac{\delta F}{\delta q}} = \frac{\delta f}{0} \qquad \text{...(11)}$$

என்பதாகும்.

(11)-ன் தீர்வுகள் (10)-ன் தீர்வுகளாகும். இங்கிருந்து f-ன் அமைப்பு தெரியவரும். இது ஒரு பொது அமைப்பென நாம் அறிவோம். ஆனல் (11)-ன் தீர்வாக p அல்லது q புலனுகுமாயின், அதையே 'f' ஆகக் கொள்ளலாம் ; p, q இரண்டுமே இணைக்கப் பட்ட ஒரு தொடர்பு கிடைத்தாலும் அதை 'f' ஆகக் கொள்ள லாம். இந்த இரு விதங்களில் ஒன்ருக நாம் 'f' கண்டு பிடித்து விட்டால், அதிக முயற்சியின்றி (1)-ன் தீர்வினைக் காண முடியும் ; இல்லையேல், (1)-ன் தீர்வு காண்பதற்கு அதிக முயற்சியும்

சுருக்குதல் தொல்லேயும் ஏற்படும். இருப்பினும், கொள்கையைப் பொருத்த மட்டில் 'f' காண நமக்கு (11) பயன்படும் ; பின்னர் அது கொண்டு (1)-ன் தீர்வு காண இயலும்.

இந்த முறை (சார்ப்பி முறை) மிகவும் பொதுவானபடியால், இந்த முறை கொண்டே திட்ட அமைப்புகளெனக் கொண்ட I, II, III, IV (13·1, 13·2, 13·3, 13·4) என்ற அமைப்புகளிலுள்ள சமன்பாடுகளேயும் நாம் தீர்க்கலாம். அவை பின்னர் எடுத் துரைக்கப் பட்டிருக்கின்றன. எனினும் திட்டமான அமைப்புகள் என்று விளக்கப்பட்ட சமன்பாடுகளே அந்தந்த முறைகளில் தீர்ப்பதே எளிதாகும். சார்ப்பி முறை அவற்றிற்குப் பொருத்த மாயினும், சற்று கடினமாக இருக்கலாம்.

13-5·11 : சார்ப்பி முறைப்படி திட்ட அமைப்பு I

அமைப்பு **I** :

$F(p, q)=0$

$$\frac{\delta F}{\delta x}=\frac{\delta F}{\delta y}=\frac{\delta F}{\delta z}=0\ ;\ \frac{\delta F}{\delta p}\ ,\ \frac{\delta F}{\delta q}$$ மட்டுமே கிடைக்கும்.

எனவே 'f' காண,

$$\frac{dp}{0}=\frac{dq}{0}=\frac{dz}{-p\frac{\delta F}{\delta p}-q\frac{\delta F}{\delta q}}=\frac{dx}{-\frac{\delta F}{\delta p}}$$

$$=\frac{dy}{-\frac{\delta F}{\delta q}}=\frac{df}{0}$$

(1), (4) கொண்டு $dp=0$ எனவும், (2), (4) கொண்டு $dq=0$ எனவும் வரும்.

$\therefore\ p=a\ ;\ q=b$ என்ற மாறிலிகள் பெறலாம். இவற்றினை $F(p, q)=0$-ல் ஈடு செய்ய

$F(a, b)=0$ அல்லது $b=\varphi(a)$ என்று பெறலாம்

இப்பொழுது $p\,dx+q\,dy=dz$ என்ற தொடர்பைக் கொண் டால், $a\,dx+b\,dy=dz$ எனவும், ஆனல் $F(a, b)=0$ என்ற கட்டுப் பாடு உண்டெனவும் பெறப்படும்.

$\therefore\ z=ax+by+c$; கட்டுப்பாடு $F(a, b)=0$

13-5·12 ; அமைப்பு II

$$z=px+qy+f\,(p,\,q)$$

$$\frac{\delta F}{\delta x}=p$$

$$\frac{\delta F}{\delta y}=q$$

$$\frac{\delta F}{\delta z}=-1$$

$$\frac{\delta F}{\delta p}=x+\frac{\delta f}{\delta p}$$

$$\frac{\delta F}{\delta q}=y+\frac{\delta f}{\delta q}$$

எனவே துணைச் சமன்பாடு பெற,

$$\frac{dp}{p-p}=\frac{dq}{q-q}=\frac{dz}{-p\left(x+\frac{\delta f}{\delta p}\right)-q\left(y+\frac{\delta f}{\delta q}\right)}=\frac{dx}{-\left(x+\frac{\delta f}{\delta p}\right)}$$

$$=\frac{dy}{-\left(y+\frac{\delta f}{\delta q}\right)}=\frac{df}{0}$$ என வரும்.

முதல் இரண்டு சமன்பாடுகளோடு, ஏதாவது மற்றொன்றை எடுத்துக் கொண்டால்,

$$dp=0$$

$dq=0$ எனவும்,

அதன் காரணமாக $p=a$

$q=b$ எனவும் வரும்.

ஆனால் $z=px+qy+f\,(p,\,q)$ ஆதலால்

$z=ax+by+f\,(a,\,b)$ என்ற தீர்வு பெறப்படும்,

13-5·13 : அமைப்பு III

$F(z, p, q)=0$ என்பது சமன்பாடு.

$$\frac{\delta F}{\delta x}=0$$

$$\frac{\delta F}{\delta y}=0$$

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{\delta F}{\delta z}\\[2ex] \dfrac{\delta F}{\delta p}\\[2ex] \dfrac{\delta F}{\delta q}\end{array}\right\}\text{ மூன்றும் மதிப்பேற்கும்.}$$

இப்பொழுது சார்ப்பி விதிப்படி,

$$\frac{dp}{0+p\dfrac{\delta F}{\delta z}}=\frac{dq}{0+q\dfrac{\delta F}{\delta z}}=\frac{dz}{-p\dfrac{\delta F}{\delta p}-q\dfrac{\delta F}{\delta q}}$$

$$=\frac{dx}{-\dfrac{\delta F}{\delta p}}=\frac{dy}{-\dfrac{\delta F}{\delta q}}=\frac{df}{0}\text{ என வரும்.}$$

முதல் இரண்டு சமன்பாடுகளிலிருந்து $\frac{dp}{p}=\frac{dq}{q}$ எனவும், அதன் காரணமாக $q=ap$ என்ற தொடர்பும் வரும். கொடுக்கப் பட்ட சமன்பாட்டின்படி, $F(z, p, ap)=0$ என வரும். இதிலிருந்து $p=\phi(z, a)$ என வரலாம்.

$dz=p\,dx+q\,dy$ என்ற தொடர்பு உண்மையாதலால், $dz=\phi(z, a)\,dx+a\,\phi(z, a)\,dy$ எனவும் வரும்.

$$\therefore\quad \frac{dz}{\phi(z, a)}=d(x+ay)\text{ என வரும்.}$$

$$\therefore\int\frac{dz}{\phi(z, a)}=x+ay+b\text{ என்ற தீர்வு கிடைக்கும்.}$$

13-5·14 : அமைப்பு IV

$$F(x, y, p, q) \equiv F_1(x, p) - F_2(y, q) = 0$$

$$\frac{\delta F}{\delta x} = \frac{\delta F_1}{\delta x}$$

$$\frac{\delta F}{\delta y} = -\frac{\delta F_2}{\delta y}$$

$$\frac{\delta F}{\delta z} = 0$$

$$\frac{\delta F}{\delta p} = \frac{\delta F_1}{\delta p}$$

$$\frac{\delta F}{\delta q} = -\frac{\delta F_2}{\delta q}$$

$\therefore$ 'சார்ப்பி' விதிப்படி

$$\frac{dp}{\frac{\delta F_1}{\delta x} + 0} = \frac{dq}{-\frac{\delta F_2}{\delta y}} = \frac{dz}{-p\frac{\delta F_1}{\delta p} + q\frac{\delta F_2}{\delta q}} = \frac{dx}{-\frac{\delta F_1}{\delta p}}$$

$$= \frac{dy}{\frac{\delta F_2}{\delta q}} = \frac{df}{0}$$ என வரும்.

(1)-ம் (4)-ம் எடுத்துக் கொண்டால்,

$$\frac{dp}{dx} = \frac{\frac{\delta F_1}{\delta x}}{-\frac{\delta F_1}{\delta p}} = \phi_1(x, p)$$ என வரும்.

இதன் தொகை கண்டு, $p = f_1(x)$ எனக் காணலாம் (2)-ம், (5)-ம் எடுத்துக் கொண்டால்,

$$\frac{dq}{dy} = \frac{\frac{-\delta F_2}{\delta y}}{\frac{\delta F_2}{\delta q}} = \phi_2(y, q)$$ என வரும்.

இதன் தொகை கண்டு, $q=f_2(y)$ எனக் காணலாம். இப்பொழுது $dz=f_1(x)\,dx+f_2(y)\,dy$ என வரும்.

$$\therefore \quad z=\int f_1(x)\,dx+\int f_2(y)\,dy$$ என்ற தீர்வு கிடைக்கும்.

திட்டமான அமைப்புகள் I முதல் IV வரை உள்ள அமைப்புகள் அல்லாமல், பொது அமைப்பிலுள்ள ஒரு சமன்பாட்டை, சார்ப்பி முறை கொண்டு தீர்ப்போம்.

13-5·5 : எ.கா. (1)

$y(p^2+q^2)=qz$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வு காண்க.

இங்கு $F\equiv y(p^2+q^2)-qz=0$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\delta F}{\delta x}&=0\\ \frac{\delta F}{\delta y}&=p^2+q^2\\ \frac{\delta F}{\delta z}&=-q\end{aligned}\right\}\qquad \begin{aligned}\frac{\delta F}{\delta p}&=2py\\ \frac{\delta F}{\delta q}&=2qy-z\end{aligned}$$

எனவே துணைச் சமன்பாடு 'f' காண,

$$\frac{dp}{-pq}=\frac{dq}{p^2}=\frac{dx}{-2py}=\frac{dy}{z-2qy}$$

$$=\frac{dz}{-2(p^2+q^2)\,y+qz}=\frac{df}{0}$$ என்ற சமன்பாடுகள் பெறலாம்.

(5) ஆவது உறுப்பில் கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டை ஈடு செய்தால் அது, $\dfrac{dz}{-2qz+qz}=\dfrac{dz}{-qz}$ என வரும்.

எனவே $$\frac{dp}{-pq}=\frac{dz}{-qz}$$

$$\therefore \quad \frac{dp}{p}=\frac{dz}{z}$$

$\therefore$ தொகை காண, $p=az$ என வரும். ...(1)

இதைக் கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டில் ஈடு செய்தால்,

$$a^2z^2+q^2 = \frac{qz}{y}$$

அல்லது $q^2y-qz+a^2y\ z^2=0$ ...(2)

என வரும்.

$$\therefore\quad q = \frac{z \pm \sqrt{z^2-4a^2y^2z^2}}{2y}$$

$$= z\left(\frac{1 \pm \sqrt{1-4a^2y^2}}{2y}\right) \qquad ...(3)$$

$dz = pdx+qdy$ என்பது பொதுப் பொருத்தமாதலின்

$dz=azdx + \frac{z(1+\sqrt{1-4\ a^2y^2}}{2y}$ என வரும்.

(q-ன் முதல் மதிப்பு எடுத்துக் கொள்ளப் பட்டிருக்கிறது.)

$$\therefore\quad \frac{dz}{z} = a\ dx + \frac{(1+\sqrt{1-4a^2y^2})}{2y}\,dy$$

தொகை கண்டால்,

$$\log z = ax+\tfrac{1}{2}\log y+\tfrac{1}{2}\left[\sqrt{1-4a^2y^2}+\tfrac{1}{2}\log\left(\frac{\sqrt{1-4a^2y^2}-1}{\sqrt{1-4a^2y^2}+1}\right)\right] + b$$

இதுவே கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டின் தீர்வாகும்.

தனிச் சிறப்புத் தீர்வு :

$$\frac{\delta\varphi}{\delta a} \equiv x + \text{ஒரு தொடர்பு} = 0$$

$$\frac{\delta\varphi}{\delta b} \equiv 1 \qquad = 0$$

$1=0$ என்பது பொருந்தாதாகையின், தனிச் சிறப்புத் தீர்வு இல்லை. பொதுத் தீர்வு, முறைப்படி காணலாம்.

எ.கா. (2)

$p^2+q^2-2px-2qy+1=0$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வு காண்க.

$$\left.\begin{aligned}\frac{\delta F}{\delta x} &= -2p\\ \frac{\delta F}{\delta y} &= -2q\\ \frac{\delta F}{\delta z} &= 0\end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned}\frac{\delta F}{\delta p} &= 2p-2x\\ \frac{\delta F}{\delta q} &= 2q-2y\end{aligned}$$

∴ துணைச் சமன்பாடு காண,

$$\frac{dp}{-2p+0} = \frac{dq}{-2q+0} = \frac{dz}{-2p^2+2px-2q^2+2qy}$$

$$= \frac{dx}{2x-2p} = \frac{dy}{2y-2q} = \frac{df}{0}$$

(1)-ம், (4)-ம் எடுத்துக் கொண்டால்,

$$\frac{dp}{-2p} = \frac{dx}{2x-2p} \text{ என வரும்.}$$

$$\therefore \quad \frac{dx}{dp} = \frac{2x-2p}{-2p} = \frac{-x}{p}+1$$

$$\therefore \quad \frac{dx}{dp} + \frac{x}{p} = 1$$

இதன் தீர்வு $xp = \int p\, dp +$ ஒரு மாறிலி

$$= \frac{p^2}{2} - \frac{a^2}{2}$$

$$\therefore \quad 2xp = p^2 - a^2$$

அல்லது $p^2-2xp-a^2=0$

$$\therefore \quad p = x \pm \sqrt{x^2+a^2}$$

இதைக் கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டில் ஈடு செய்தால் $q^2-2qy+(a^2+1)=0$ என வரும்; ஏனெனில் $p^2-2px-a^2=0$ என முன்னர் பெற்றிருக்கிறோம்.

இவற்றிலிருந்து $p=x+\sqrt{x^2+a^2}$ (ஒரு தீர்வு மட்டும்)

$$q=y+\sqrt{y^2-(a^2+1)} \text{ (ஒரு தீர்வு மட்டும்)}$$

$dz=p\,dx+q\,dy$ என்ற தொடர்பில் இவற்றை ஈடு செய்தால்

$$dz=(x+\sqrt{x^2+a^2})\,dx+(y+\sqrt{y^2-(a^2+1)})\,dy$$

இதன் தொகை கண்டால்.

$$z=\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}\left[x\sqrt{x^2+a^2}+a^2\log\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)\right]$$

$$+\frac{y^2}{2}+\frac{1}{2}\left[y\sqrt{y^2-(a^2+1)}\right.$$

$$\left.-(a^2+1)\log\left(y+\sqrt{y^2-(a^2+1)}\right)\right]$$

$$+b$$

அதாவது

$$2z=x^2+y^2+x\sqrt{x^2+a^2}+a^2\log(x+\sqrt{x^2+a^2})$$

$$+y\sqrt{y^2-(a^2+1)}-(a^2+1)\log(y+\sqrt{y^2-(a^2+1)})$$

$+B$ என வருவதே இச்சமன்பாட்டின் தீர்வாகும்; இரு மாறிலிகள் a, b இருப்பதால் இது முழுத் தீர்வாகும். தனிச் சிறப்புத் தீர்வு இராது. (ஏனெனில் $\frac{\delta\varphi}{\delta B}=1=0$ என்ற பொருந்தா முடிவு வரும்.) மற்றும் பொதுத் தீர்வு முறைப்படி காணலாம்.

திட்டமான அமைப்புகளில் ஒவ்வொன்றிலும் முன்னர் செய்து காட்டப்பட்டிருக்கும் கணக்கு ஒவ்வொன்றை, சார்ப்பி முறைப்படி செய்து பார்ப்போம்.

13-5·6 : அமைப்பு I (*சார்ப்பி முறை*)

$pq=c$ என்ற சமன்பாடு கொள்க. இதன் தீர்வு, $z=ax+\frac{c}{a}y+K$ என நாம் முன்னர் 13-11-ல் பெற்றோம்.

சார்ப்பி முறை

$$\frac{\delta F}{\delta p}=q$$

$$\frac{\delta F}{\delta q}=p$$

$$\frac{\delta F}{\delta x}=\frac{\delta F}{\delta y}=\frac{\delta F}{\delta z}=0$$

$$\therefore \frac{dp}{0}=\frac{dq}{0}=\frac{dz}{-pq-pq}=\frac{dx}{-q}=\frac{dy}{-p}$$

$$\therefore \frac{dp}{0}=\frac{dq}{0}=\frac{dz}{2pq}=\frac{dx}{q}=\frac{dy}{p}$$

$p\ dp=0 \quad \therefore\ p=a$ (மாறிலி)

$q\ dq=0 \quad q=\frac{c}{a}$ {ஏனெனில் $pq=c$ என்பது சமன்பாடு

$$dz=p\ dx+q\ dy$$

$$=a\ dx+\frac{c}{a}\ dy$$

$\therefore$ தொகை காண,

$z=ax+\frac{c}{a}y+K$ (a, K மாறிலிகள்) என்ற தீர்வு கிடைக்கும்.

13-5·7 : அமைப்பு II (*சார்ப்பி முறை*)

$z=px+qy+p^2+q^2$-ன் தீர்வு காண்க.

$z=ax+by+a^2+b^2$ என்பது இதன் தீர்வென நாம் முன்னர் 13·21-ல் கண்டோம்.

சார்ப்பி முறைப்படி காண்போம் :

$F \equiv px+qy+p^2+q^2-z$ எனக் கொள்வோம்.

$$\frac{\delta F}{\delta x}=p \quad ; \quad \frac{\delta F}{\delta p}=x+2p$$

$$\frac{\delta F}{\delta y}=q \quad ; \quad \frac{\delta F}{\delta q}=y+2q$$

$$\frac{\delta F}{\delta z}=-1$$

$$\therefore \quad \frac{dp}{0}=\frac{dq}{0}=\frac{dz}{-px-2p^2-qy-2q^2}$$

$$=\frac{dx}{-x-2p}=\frac{dy}{-y-2q}$$

$\therefore \quad dp=0$

$\therefore \quad p=a$

மேலும் $dq=0$

$q=b$

$\therefore \quad z=ax+by+a^2+b^2$ என்ற தீர்வு கிடைக்கும்.

13·5·8 : அமைப்பு III *(சார்ப்பி முறை)*

$z^2\,(p^2+q^2+1)=c^2$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வை, சார்ப்பி முறைப்படி காண்க. (13·31 காண்க)

$F \equiv z^2\,(p^2+q^2+1)-c^2$ எனக் கொள்க.

$$\left.\begin{aligned}\frac{\delta F}{\delta p}&=2z^2p\\ \frac{\delta F}{\delta q}&=2z^2q\\ \frac{\delta F}{\delta z}&=2z\,(p^2+q^2+1)\end{aligned}\right\} \qquad \begin{aligned}\frac{\delta F}{\delta x}&=0\\ \frac{\delta F}{\delta y}&=0\end{aligned}$$

$$\therefore \quad \frac{dp}{0+2zp\,(p^2+q^2+1)}=\frac{dq}{0+2zq\,(p^2+q^2+1)}=\ldots\ldots$$

இவ்விரண்டிலிருந்து $\dfrac{dp}{p}=\dfrac{dq}{q}$ வரும்.

$\therefore \quad p = aq$

$\therefore \quad z^2 (a^2q^2 + q^2 + 1) = c^2$

$\therefore \quad q^2 (a^2+1) = \dfrac{c^2}{z^2} - 1$

$$\therefore \qquad q = \sqrt{\frac{c^2 - z^2}{z^2 (a^2+1)}}$$

$$p = a \sqrt{\frac{c^2 - z^2}{z^2 (a^2+1)}}$$

$$\therefore \quad dz = \frac{a}{z} \sqrt{\frac{c^2 - z^2}{a^2+1}}\; dx + \frac{1}{z} \sqrt{\frac{c^2 - z^2}{a^2+1}}\; dy$$

$$\therefore \qquad \frac{z\, dz}{\sqrt{c^2 - z^2}} = \frac{a}{\sqrt{a^2+1}}\, dx + \frac{1}{\sqrt{a^2+1}}\, dy$$

$$\therefore \quad \int \frac{z\, dz}{\sqrt{c^2 - z^2}} = \frac{a}{\sqrt{a^2+1}}\, x + \frac{1}{\sqrt{a^2+1}}\, y + b$$

$$\therefore \quad - \sqrt{c^2 - z^2} = \frac{a}{\sqrt{a^2+1}}\, x + \frac{y}{\sqrt{a^2+1}} + b$$

அதாவது $(a^2+1)(c^2 - z^2) = (ax + y + B)^2$ என்பது தீர்வாகும்.

குறிப்பு 1 $q = ap$ எனக் கொண்டால்

$(a^2+1)(c^2 - z^2) = (x + ay + b)^2$ என்ற அமைப்பில் தீர்வு வரும்.

13-5·9 : அமைப்பு IV (சார்ப்பி முறை)

$p^2 + q^2 = x + y$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வு காண்க.

(13-4·1 காண்க.)

$F \equiv p^2 + q^2 - x - y = 0$ எனக் கொள்க.

$$\frac{\delta F}{\delta p} = 2p\,; \quad \frac{\delta F}{\delta x} = -1\,; \quad \frac{\delta F}{\delta z} = 0$$

$$\frac{\delta F}{\delta q} = 2q\,; \quad \frac{\delta F}{\delta y} = -1$$

$$\therefore \quad \frac{dp}{-1+0} = \frac{dq}{-1+0} = \frac{dz}{-2p^2-2q^2} = \frac{dx}{-2p} = \frac{dy}{-2q}$$

(1)-ம், (4)-ம் எடுத்துக் கொண்டால்,

$-2p\ dp = -dx$

$p^2 = x+a$

இதைக் கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டில் ஈடு செய்தால்

$x+a+q^2 = x+y$

$\therefore q^2 = y-a$

$\therefore \quad p = \sqrt{x+a}\ ; \quad q = \sqrt{y-a}$

$dz = p dx + q dy$ என்பதைப் பயன்படுத்தினுல்

$\int dz = \int \sqrt{x+a}\ dx + \int \sqrt{y-a}\ dy$ என வரும்;

$\therefore \quad z = \frac{2}{3}(x+a)^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{3}(y-a)^{\frac{3}{2}} + b$ என்ற
முழுத் தீர்வு வரும்.

$\frac{\delta \varphi}{\delta b} \equiv 1 = 0$ என ஒரு பொருந்தா முடிவு பெறப்படுவதால், தனிச் சிறப்புத் தீர்வு இராது.

பயிற்சி 13·5

பின்வரும் சமன்பாடுகளின் முழுத் தீர்வுகள் காண்க, தனிச் சிறப்புத் தீர்வுகளிருப்பின் அவற்றினையும் கண்டு சரி பார்க்க.

(1) $pq = p+q$

(2) $p^2+q^2 = 4z$

(3) $pz = 1+q^2$

(4) $p^2+pq = 4z$

(5) $zp^2 - y^2p + y^2q = 0$

(6) $pq + 2x(y+1)p + y(y+2)q - 2(y+1)z = 0$

(7) $x^4p^2=z^2+yzq$
(குறிப்பு : $X=\frac{1}{x}$; $Y=\frac{1}{y}$; $Z=\log z$ என ஈடு செய்க.)

(8) $(1-y^2)\,x\,q^2+y^2p=0$

(9) $2py^2-q^2z=0$

(10) $q=xp+p^2$

(11) $(y^2+z^2-x^2)p-2xyq+2xz=0$

(12) $\sqrt{p}+\sqrt{q}=1$

(13) $q=(z+px)^2$

(14) $(x+y)\,(p+q)^2+(x-y)\,(p-q)^2=1$
[குறிப்பு : $x+y=u^2$, $x-y=v^2$ என ஈடு செய்க.]

(15) $(p+q)\,(px+qy)=1$

(16) $(z-px-qy)^2=a^2\,(x^2+y^2+z^2)$

(17) $\frac{(y-z)p}{yz}+\frac{(z-x)\,q}{zx}=\frac{x-y}{xy}$

(18) $z-px-qy=c\sqrt{1+p^2+q^2}$

(19) $p\cos(x+y)+q\sin(x+y)=z$

(20) $pq=px+qy$

விடை 13·5

(1) $(b-1)z=bx+b\,(b-1)\,y+c$

(2) $z\,(1+a^2)=(x+ay+b)^2$; த.சி. தீ. $z=0$

(3) $z^2-z\sqrt{z^2-4a^2}+4a^2\log(z+\sqrt{z^2-4a^2})=4\,(x+ay+b)$

(4) $(1+a)\,z=(x+ay+b)^2$; த.சி.தீ. $z=0$

(5) $yz^2=2\,(axy+ay^2+a^2+by)$

(6) $z=ax+b\ (y^2+2y+a)$; த.சி.தீ. $z+x(y^2+2y)=0$

(7) $x \log z=a+(a^2-1)\ x \log y+bx$

(8) $(2z-ax^2+b)^2=4a\ (y^2-1)$

(9) $z^2=a^2x+ay^2+b$

(10) $z=2axe^y+2a^2e^{2y}+b$

(11) $x^2+y^2+z^2=z\ \varphi\left(\frac{y}{z}\right)$

(12) $z=ax+(1-\sqrt{a})^2y+b$

(13) $xz=ay+2\ \sqrt{ax}+b$

(14) $z=a\sqrt{x+y}+\sqrt{1-a^2}\sqrt{x-y}+b$

(15) $\sqrt{1+a}\ z=2\ \sqrt{x+ay}+b$

(16) $z+\sqrt{x^2+y^2+z^2}=x^{(1-a)}\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$

(17) $(x+y+z)=\varphi\ (xyz)$

(18) $z=ax+by+c\sqrt{1+a^2+b^2}$

த.சி,தீ. $x^2+y^2+z^2=c^2$

(19) $$\left\{\cos(x+y)+\sin(x+y)\right\}e^{y-x}$$

$$=\varphi\left\{z^{\sqrt{2}}\tan\left(\frac{3\pi}{8}-\frac{x+y}{2}\right)\right\}$$

(20) (i) $2z=\left(\frac{x}{a}+ay\right)^2+b$

(ii) $z=xy+y\sqrt{x^2-a_1^{\,2}}+b_1$

(iii) $z=xy+x\sqrt{y^2+a_2^{\,2}}+b_2$

14. பகுதி வகைக்கெழுச் சமன் பாடுகள்–இரண்டாம் வரிசை
(Partial differential equations-Second order)

A

14·0 இரண்டாம் வரிசை பகுதி வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகள்-ஒரு படிக்குரியன (Linear)

$$p = \frac{\delta z}{\delta x} \; ; \; q = \frac{\delta z}{\delta y} \; ; \; r = \frac{\delta^2 z}{\delta x^2} \; ; \; s = \frac{\delta^2 z}{\delta x \; \delta y} \; ;$$

$t = \dfrac{\delta^2 z}{\delta y^2}$ என்ற குறியீடுகள் பயன்படுத்தப் படும்.

ஒருபடிக்குரிய சமன்பாடுகள் (இரண்டாம் வரிசை) பொது அமைப்பு

$Rr + Ss + Tt + Pp + Qq + Zz = F$ என்ற அமைப்பில் P, Q, R, S, T, Z, F யாவும் x, y மட்டுமே உள்ள சார்புகள்; R, S, T மூன்றும் ஒருங்கே பூச்சியமல்ல. 12-3·1(3)-ல் நாம் கண்டபடி, இச் சமன்பாட்டின் பொதுத் தீர்வில் இரண்டு தம்மிச்சையான (arbitrary) சார்புகள் வரும்.

சில குறிப்பிட்ட அமைப்புகளில் உள்ள சில சமன்பாடுகளைப் பார்ப்போம்.

14–1: அமைப்பு I

$$r = \frac{\delta^2 z}{\delta x^2} = F_1 \; (x, y) \left[= \frac{F}{R} \right]$$

$$s = \frac{\delta^2 z}{\delta x \ \delta y} = F_2(x, y) \quad \left[= \frac{F}{S} \right]$$

$$t = \frac{\delta^2 z}{\delta y^2} = F_3(x, y) \quad \left[= \frac{F}{T} \right]$$

இவற்றினை நேரடியாகத் தீர்க்கலாம்.

14-1·1 1 எ.கா (1)

$$r = 0$$

அதாவது $\frac{\delta^2 z}{\delta x^2} = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வு காண்க.

$$\frac{\delta}{\delta x}\left(\frac{\delta z}{\delta x}\right) = 0$$

எனவே $\frac{\delta z}{\delta x} = f(y)$ ஆக இருக்கும்.

மற்றுமொரு முறை தொகை கண்டால் (x ஒட்டி) $z = x f(y) + F(y)$ என்ற தீர்வு வரும். இங்கு f, F என்பவை தம்மிச்சையான சார்புகள்.

எ. கா. (2)

$$re^{y} = x^2$$

அதாவது $\frac{\delta^2 z}{\delta x^2} = x^2 e^{-y}$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வு காண்க.

$$\frac{\delta}{\delta x}\left(\frac{\delta z}{\delta x}\right) = x^2 e^{-y}$$

$$\therefore \ \frac{\delta z}{\delta x} = \frac{x^3}{3} e^{-y} + f(y)$$

மற்றொரு முறை தொகை காண, (x ஒட்டி)

$$z = \frac{x^4}{12} e^{-y} + x f(y) + F(y)$$

இங்கு f, F என்பவை தம்மிச்சையான சார்புகள்.

எ.கா. (3)

$r=f(x)$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வு காண்க.

$$\therefore \quad \frac{\delta z}{\delta x} = \int f(x)\,dx+\varphi\,(y)$$

$$\therefore \quad z = \int\int f(x)\,(dx)^2+x\,\varphi(y)+\psi\,(y)$$

φ, ψ என்பவை தம்மிச்சையான சார்புகள்.

எ.கா. (4)

$\dfrac{\delta^2 z}{\delta x\,\delta y} = \dfrac{x}{y} + C$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வு காண்க

C—ஒரு மாறிலி.

$\dfrac{\delta z}{\delta x} = p$ எனக் கொள்வோமானல்,

$\dfrac{\delta^2 z}{\delta x\;\delta y} = \dfrac{\delta p}{\delta y}$ எனவாகும்.

$\therefore \quad \dfrac{\delta p}{\delta y} = \dfrac{x}{y} + c$ என்பது சமன்பாடு.

y ஒட்டித் தொகை கண்டால்,

$\int dp = \int \dfrac{x}{y}\,dy + \int c\,dy$ என்பது இதன் தீர்வாகும்.

அதாவது $p=x\log y+Cy+\varphi_1\,(x)$. இங்குத் தொகை காணும் பொழுது பெறப்படும் மாறிலி x-ன் சார்பாக இருப்பது பொருத்த மென்பதைக் காண்க. $[\varphi_1\,(x)]$.

எனவே $\dfrac{\delta z}{\delta x} = x\,\log\,y+Cy+\varphi_1(x)$.

xஒட்டித் தொகை கண்டால்,

$$\therefore \quad z = \frac{x^2}{2}\log y+Cx\,y + \int \varphi_1\,(x)\;dx+\psi\,(y)$$

$= \dfrac{x^2}{2}\log y+Cx\,y+\varphi\,(x)+\psi\,(y)$ என்ற தீர்வு கிடைக்கும்.

இங்குத் தொகை காணும்பொழுது பெறப்படும் மாறிலி, y-ன் சார்பாக இருப்பது பொருத்தமென்பதைக் காண்க. $[\phi(y)]$

எனவே, பொதுவான முழுத் தீர்வில் $\varphi(x)+\phi(y)$ என்ற இரு தம்மிசையான சார்புகள் தோன்றுவது காண்க.

எ. கா. (5)

$\frac{\delta^2 z}{\delta y^2}=0$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வு காண்க.

$$\frac{\delta}{\delta y}\left(\frac{\delta z}{\delta y}\right)=0$$

$$\therefore \quad \frac{\delta z}{\delta y}=f(x)$$

மற்றொரு முறை தொகை கண்டால், (y ஒட்டி)

$z=y\,f(x)+F(x)$

எ. கா. (6)

$t=x^2\cos(xy)$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வு காண்க.

$$t=\frac{\delta}{\delta y}\left(\frac{\delta z}{\delta y}\right)=x^2\cos(xy)$$

$$\therefore \quad \frac{\delta z}{\delta y}=\frac{x^2}{x}\sin(xy)+\varphi(x)$$

$$=x\sin(xy)+\varphi(x)$$

மற்றொரு முறை தொகை கண்டால், (y ஒட்டி)

$$z=\frac{x}{-x}\cos(xy)+y\,\varphi(x)+F(x)$$

$$=-\cos(xy)+y\,\varphi(x)+F(x)$$

இங்கு φ, F என்பவை தம்மிச்சையான சார்புகள்.

பயிற்சி 14·1

பின்வரும் சமன்பாடுகளின் தீர்வு காண்க.

(1) $s=0$

(2) $r=y^2e^x$

(3) $t = 6xy$

(4) $s = 3(x^2+y^2)$

(5) $s = \dfrac{1-4x^2y}{xy^2}$

விடை 14·1

(1) $z = f(x)+F(y)$

(2) $z = y^2e^x+x\,\varphi(y)+\phi(y)$

(3) $z = xy^3+y\,\varphi(x)+\phi(x)$

(4) $z = \varphi(x)+\phi(y)+xy(x^2+y^2)$

(5) $z = -\dfrac{1}{y}\log x - 2x^2\log y + \varphi(x)+\phi(y)$

14-2 1 அமைப்பு II

(i) $Rr + Pp = R\dfrac{\delta p}{\delta x} + Pp = F$

(ii) $Ss + Pp = S\dfrac{\delta p}{\delta y} + Pp = F$

(iii) $Ss + Qq = S\dfrac{\delta q}{\delta x} + Qq = F$

(iv) $Tt + Qq = T\dfrac{\delta q}{\delta y} + Qq = F$

இவை யாவும் P அல்லது q ஐச் சார்புடை மாறியாகக் கொண்டு சாதாரண ஒரு படிக்குரிய சமன்பாடுகளையொத்தவை. பின்வரும் எடுத்துக் காட்டுகளைக் காண்க.

எ. கா. (1)

$$r + Mp = N \begin{pmatrix} M\text{- ஒரு } x\text{-ன் சார்பு} \\ N\text{- ஒரு } y\text{-ன் சார்பு} \end{pmatrix}$$

$$\frac{\delta p}{\delta x} + Mp = N$$

$$\therefore\ p\,e^{\int M dx} = \int e^{\int M dx}\,.\,N\,.\,dx + \varphi(y)$$

$$\therefore\ p = e^{-\int M dx}\left[\int e^{\int M dx}\ N\,dx + \varphi(y)\right]$$

$$\therefore\ z = \int dx\, e^{-\int M dx}\left[\int e^{\int M dx}\ N\,dx + \varphi(y)\right] + \phi(y)$$

இங்கு வகைக்கெழு காண்பதற்கும், தொகை காண்பதற்கும் y ஒரு மாறிலியாகக் கொள்ளப்பட்டிருக்கிறது.

எ.கா. (2)

$$s + Mp = N \quad \begin{pmatrix} M\text{—ஒரு } x\text{-ன் சார்பு} \\ N\text{—ஒரு } y\text{-ன் சார்பு} \end{pmatrix}$$

$$\frac{dp}{dy} + Mp = N$$

$$\therefore\ p = e^{-My}\int\left[e^{My}\ N\,dy + \varphi(x)\right]$$

$$\therefore\ z = \int dx\ e^{-My}\left[e^{My}\ N\,dy + \varphi(x)\right] + \phi(y)$$

எ.கா. (3)

$$s + Mq = N \begin{pmatrix} M\text{—ஒரு } x\text{-ன் சார்பு} \\ N\text{— ஒரு } y\text{-ன் சார்பு} \end{pmatrix}$$

$$\frac{\delta q}{\delta x} + Mq = N$$

$$\therefore\ q = e^{-\int M dx}\left[\int e^{\int M dx}\ N\,dx + \varphi(y)\right]$$

$$\therefore\ z = \int dy\, e^{-\int M dx}\left[\int e^{\int M dx}\ N\,dx + \varphi(y)\right] + \phi(x)$$

எ. கா. (4)

$xr + p = 9x^2y^2$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வு காண்க.

$x\,\dfrac{\delta^2 z}{\delta x^2} + \dfrac{\delta z}{\delta x} = 9\,x^2y^2$ என்பது சமன்பாடு. ...(i)

$\frac{\delta z}{\delta x} = p$ எனக் கொள்வதால்,

$$x \frac{\delta p}{\delta x} + p = 9x^2y^2$$

அல்லது $\frac{\delta p}{\delta x} + \frac{p}{x} = 9\, xy^2$ என வரும்.

x ஒட்டித் தீர்வு கண்டால்,

$$p\, e^{\int \frac{1}{x} dx} = \int e^{\int \frac{1}{x} dx}\, 9\, xy^2 dx + \varphi(y)$$

அதாவது $px = 9y^2 \int x^2 dx + \varphi(y)$

அதாவது $px = 9y^2 \frac{x^3}{3} + \varphi(y)$

$\therefore \quad p = 3x^2y^2 + \frac{1}{x} \varphi(y)$

அதாவது $\frac{\delta z}{\delta x} = 3x^2y^2 + \frac{1}{x} \varphi(y)$

இரு பக்கங்களுக்கும் x ஒட்டித் தொகை கண்டால்,

$z = x^3y^2 + \varphi(y) \log x + \phi(y)$ என்ற தீர்வு கிடைக்கும்.

எ.கா. (5)

$xq = t + \sin y + x \cos y$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வு காண்க.

$x \frac{\delta z}{\delta y} = \frac{\delta^2 z}{\delta y^2} + \sin y + x \cos y$ என்பது சமன்பாடு.

$\frac{\delta z}{\delta y} = q$ எனக் கொண்டால், $\frac{\delta^2 z}{\delta y^2} = \frac{\delta q}{\delta y}$ ஆகும்.

எனவே சமன்பாடு, $\frac{\delta q}{\delta y} - xq = -(\sin y + x \cos y)$
என வரும்.

y ஒட்டித் தொகை கண்டால்,

$$q\, e^{-xy} = -\int e^{-xy} (\sin y + x \cos y)\, dy$$

$$= e^{-xy} \cos y + \varphi (x)$$ என வரும்.

$$\therefore \quad \frac{\delta z}{\delta y} = q = \left[e^{-xy} \cos y + \varphi(x) \right] e^{xy}$$

$$= \cos y + \varphi (x)\, e^{xy}$$ என வரும்.

இரு பக்கங்களுக்கும் y ஒட்டி மறுபடியும் தொகை கண்டால்

$$z = \sin y + e^{xy} \frac{\varphi(x)}{x} + \psi(x)$$

இதை $z = \sin y + e^{xy} \varphi_1 (x) + \psi (x)$ எனவும் எழுதலாம். இங்கு φ_1, ψ என்பவை தம்மிச்சையான சார்புகள்.

பயிற்சி 14·2

பின்வரும் வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகளின் தீர்வு காண்க.

(1) $xr = (n-1)\, p$

(2) $xys = y^2 + px$

(3) $t + q = xe^{-y}$

(4) $xr - p = 0$

(5) $xr + p = \frac{1}{x^2}$

(6) $yt - q = 2x^2 y$

விடை 14·2

(1) $z = f(y)\, x^n + \varphi (y)$

(2) $z = y^2 \log x + y\, \varphi (x) + \psi (y)$

(3) $z = e^{-y} \varphi (x) + \psi (x) - xye^{-y}$

(4) $z = x^2 \varphi(y) + \psi(y)$

(5) $z = \varphi(y) \log x + \psi(y) + \frac{1}{x}$

(6) $z = y^2 \varphi (x) + \psi(x) + x^2 y^2 \log y$.

14-3. அமைப்பு III

(i) $Rr+Ss+Pp \equiv R\frac{\delta p}{\delta x} + S\frac{\delta p}{\delta y} + Pp = F$

(ii) $Ss+Tt+Qq \equiv S\frac{\delta q}{\delta x} + T\frac{\delta q}{\delta y} + Qq = F$

இவற்றை

$R\frac{\delta p}{\delta x} + S\frac{\delta p}{\delta y} = F-Pp$...(i) எனவும்,

$S\frac{\delta q}{\delta x} + T\frac{\delta q}{\delta y} = F-Qq$...(ii) எனவும் எழுதலாம்.

இங்கு x, y சார்பில் மாறி ; p, q சார்புடை மாறி. சாதாரண ஒரு படிக்குரிய பகுதி வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகளை 'ஒத்தவை.

இலகிரான்ஜ் முறைப்படி, துணைச் சமன்பாடுகள்,

$\frac{dx}{R} = \frac{dy}{S} = \frac{dp}{F-Pp}$ ...(i)

என்ற அமைப்பிலும்,

$\frac{dx}{S} = \frac{dy}{T} = \frac{dq}{F-Qq}$ ...(ii)

என்ற அமைப்பிலும் கொள்ளலாம். பின்னர் தீர்வு காணலாம்.

14-3·1. எ.கா. (1)

$xs+yt+q=10x^3y$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வு காண்க.

$x\frac{\delta^2 z}{\delta x\ \delta y} + y\frac{\delta^2 z}{\delta y^2} + \frac{\delta z}{\delta y} = 10x^3y$ என்பது இச் சமன்பாடு,

$\frac{\delta z}{\delta y} = q$ ஆனபடியால், $\frac{\delta^2 z}{\delta x\ \delta y} = \frac{\delta}{\delta x}\left(\frac{\delta z}{\delta y}\right) = \frac{\delta q}{\delta x}$;

மேலும் $\frac{\delta^2 z}{\delta y^2} = \frac{\delta}{\delta y}\left(\frac{\delta z}{\delta y}\right) = \frac{\delta q}{\delta y}$

∴ இச்சமன்பாட்டை,

$x\frac{\delta q}{\delta x} + y\frac{\delta q}{\delta y} + q = 10x^3y$ என எழுதலாம்.

எனவே, இலகிரான்ஜ் முறைப்படி, துணைச் சமன்பாடுகள்,

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dq}{10x^3y-q}$$ என வரும்.

$y=cx$ என முதலிரண்டிலிருந்தும் பெறலாம். இந்த மாறிலி மதிப்பான $c = \frac{y}{x}$ என்பதைப் பின்னர் தேவைப்படுமிடங்களி லெல்லாம் பயன்படுத்துவோம்.

மேலும் $$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dq}{10x^3y-q}$$

$$= \frac{(q-8x^3y)\,dx-2x^4\,dy+x\,dq}{(q-8x^3y)\,x-2x^4\,y+x\,(10x^3\,y-q)}$$

கடைசி உறுப்பில், கீழெண் மதிப்பு = பூச்சியம்

$$\therefore\ (q-8x^3y)dx-2x^4dy+xdq=0$$

அதாவது $qdx+xdq=8x^3ydx+2x^4dy$

$$\therefore\ d\,(xq)=d\,(2x^4y)$$

$\therefore\ xq=2x^4y+c_1=2x^4y+\phi\ (c)$ (c_1, c — மாறிலிகள்)

$\therefore\ xq=2x^4\,y+\phi\left(\frac{y}{x}\right)$ எனப் பெறலாம்.

$$\therefore\ q=2x^3\,y+\frac{1}{x}\,\phi\left(\frac{y}{x}\right)$$

இரு பக்கமும் y ஒட்டித் தொகை கண்டால்,

$$z=x^3y^2+\frac{1}{x}\int\phi\left(\frac{y}{x}\right)dy+\varphi\ (x)$$

$\therefore\ z=x^3y^2+\frac{1}{x}\,\phi_1\left(\frac{y}{x}\right)+\varphi\ (x)$ என எழுதலாம்.

இரண்டு தம்மிச்சையான சார்புகள் தீர்வில் வருவது காண்க.

14–3·11. மாற்று முறை :

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dq}{10x^3y-q}$$ என்ற சமன்பாடுகளில்

$c = \dfrac{y}{x}$ என்ற தொடர்பை முதலிலிருந்து பயன்படுத்தியே பார்க்கலாம்.

$$\frac{dx}{x} = \frac{dq}{10x^3\ cx - q} = \frac{dq}{10c\ x^4 - q}$$

$$\therefore\quad q\ dx + x\ dq = 10cx^4 dx$$

அதாவது $d\ (xq) = 10cx^4 dx$

தொகை காண, $xq = \dfrac{10cx^5}{5} + f\,(c)$

இங்கு $c = \dfrac{y}{x}$ என ஈடு செய்தால்,

$$xq = 2\ \frac{y}{x}\ x^5 + f\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$= 2x^4\ y + f\left(\frac{y}{x}\right)$$ என வரும்.

$$\therefore\quad q = 2x^3\ y + \frac{1}{x}\ f\ \left(\frac{y}{x}\right)$$

இரு பக்கங்களுக்கும் y ஒட்டித் தொகை காண,

$$z = x^3y^2 + \int \frac{1}{x}\ f\left(\frac{y}{x}\right) dy + \varphi\ (x)$$

$$= x^3y^2 + \frac{1}{x}\ \phi\ \left(\frac{y}{x}\right) + \varphi\ (x)$$

இந்த முறையையும் பயன்படுத்தலாம்.

எ.கா. (2)

$2\,yt - xs + 2q = x^2y$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வு காண்க.

$$t = \frac{\delta q}{\delta y}$$

$$s = \frac{\delta q}{\delta x}$$

எனவே இச் சமன்பாட்டை,

$$2y\frac{\delta q}{\delta y} - x\frac{\delta q}{\delta x} + 2q = x^2y$$

அல்லது

$$-x\frac{\delta q}{\delta x} + 2y\frac{\delta q}{\delta y} = x^2y-2q$$ என எழுதலாம்.

இலகிரான்ஜ் முறைப்படி துணைச் சமன்பாடுகள்

$$\frac{dx}{-x} = \frac{dy}{2y} = \frac{dq}{x^2y-2q}$$

$$\therefore \quad -\log x = \tfrac{1}{2}\log y + \tfrac{1}{2}\log c$$

$$\therefore \quad \log\left(\frac{1}{x}\right) = \tfrac{1}{2}\log(cy)$$

$$\therefore \quad \frac{1}{x} = \sqrt{cy}$$

அல்லது $x^2y=a$ (மாறிலி). இந்த மாறிலி மதிப்பைப் பின்னர் தேவைப்படுமிடங்களிலெல்லாம் பயன்படுத்துவோம். இந்த மதிப்பை மூன்றுவது உறுப்பின் கீழெண்ணில் ஈடு செய்தால்,

$$\frac{dy}{2y} = \frac{dq}{a-2q}$$ என வரும்.

$$\therefore \quad 2y\,dq = 2q\,dy = a\,dy$$

அதாவது $2\,d(yq) = a\,dy$

தொகை காண, $2\,yq = ay +$ ஒரு மாறிலி

$$= ay + f(a)$$

$$= x^2y^2 + f(x^2y)$$

$$\therefore \quad q = \frac{x^2y^2}{2y} + \frac{1}{2y}f(x^2y)$$

இரு பக்கங்களுக்கும் y ஒட்டித் தொகை காண

$$z = \frac{x^2y^2}{4} + \frac{1}{2} \int \frac{1}{y} f(x^2y)\, dy + \varphi(x)$$

$$= \frac{x^2y^2}{4} + \psi(x^2y) + \varphi(x).$$

எ. கா. (1)-ல் 'மாறுபட்ட முறை' என்ற முறைப்படி இக் கணக்கு செய்யப்பட்டிருப்பது காண்க.

பயிற்சி 14·3

பின்வரும் வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகளின் தீர்வு காண்க.

(1) $xr+ys+p=8xy^2+9x^2$

(2) $2\,xr-ys+2\,p=4y^2$

(3) $sy-2xr-2p=6xy$

விடை 14·3

(1) $z = \varphi\left(\frac{x}{y}\right) + \psi(y)+x^3+x^2y^2$

(2) $z = x^2y^2+\varphi(xy^2)+\psi(y)$

(3) $z = -x^2y+\varphi(xy^2)+\psi(y)$

14-4 : அமைப்பு IV

(1) $Rr+Pp+Zz=F$

அல்லது $R\,\frac{\delta^2 z}{\delta x^2} + P\,\frac{\delta z}{\delta x} + Zz = F$

(2) $Tt+Qq+Zz=F$

அல்லது $T\,\frac{\delta^2 z}{\delta y^2} + Q\,\frac{\delta z}{\delta y} + Zz = F$

(1) என்பது x ஐச் சார்பில் மாறியாகக் கொண்ட சாதாரண ஒரு படிக்குரிய இரண்டாம் வரிசைச் சமன்பாட்டினையொக்கும். (2) என்பது அதே மாதிரி y ஐச் சார்பில் மாறியாகக் கொண்ட சமன்பாடாகும்.

எ. கா. 1 $t-2\,xq+x^2z=(x-2)\,e^{3x+2y}$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வு காண்க.

$$\frac{\delta^2 z}{\delta y^2} - 2x\,\frac{\delta z}{\delta y} + x^2 z = (x-2)\,e^{3x+2y}$$

$$(D_y-x)\,(D_y-x)\,z=(x-2)\,e^{3x+2y}$$

முதலில் $(D_y-x)\,(D_y-x)\,z=0$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வு காண்போம்.

$(D_y-x)\,z=u$ எனக் கொள்வோம்.

அப்பொழுது $(Dy-x)\,u=0$

அதாவது $\frac{\delta u}{\delta y}=xu$ என வரும்.

இதன் தொகை கண்டால்

$\log u=xy+\log \varphi\,(x)$ என வரும்.

$\therefore\quad u=e^{xy}\varphi\,(x)$ என வரும்.

இப்பொழுது $(D_y-x)\;z=e^{xy}\varphi\,(x)$

$\frac{\delta z}{\delta y}-xz=e^{xy}\varphi\,(x)$

இதன் தீர்வு,

$$ze^{-xy} = \int e^{-xy}\,e^{xy}\,\varphi\,(x)\,dy$$

$= y\,\varphi\,(x)+f\,(x)$ என வரும்.

$\therefore\quad z=y\,\varphi\,(x)\,e^{xy}+f\,(x)\,e^{xy}$

இது துணைத் தீர்வாகும்.

சிறப்புத் தீர்வு காண,

$$z = \frac{1}{(D_y-x)}\,\frac{1}{(D_y-x)}\,e^{3x+2y}\,(x-2)$$

$$\therefore \quad v=(D_y-x)\, z = \frac{1}{(D_y-x)}\, e^{(3x+2y)}\,(x-2)$$

$$v = \frac{1}{(D_y-x)}\, e^{3x+2y}\,(x-2)$$

$$\frac{\delta v}{\delta y} - xv = e^{3x+2y}\,(x-2)$$

$$\therefore \quad v\, e^{-xy} = \int e^{-xy}\, e^{3x+2y}\,(x-2)\, dy$$

$$= e^{3x}\,(x-2) \int e^{y\,(2-x)}\, dy$$

$$= \frac{e^{3x}\,(x-2)}{-(x-2)}\, e^{y\,(2-x)}$$

$$\therefore\ v = -e^{3x}\, e^{2y}$$

இப்பொழுது $(D_y-x)\, z = v = -e^{3x+2y}$

$$\frac{\delta z}{\delta y} - xz = -e^{3x+2y}$$

$$\therefore \quad ze^{-xy} = -\int e^{-xy}.\, e^{3x+2y}\, dy$$

$$= -e^{3x}\int e^{y\,(2-x)}\, dy$$

$$= \frac{e^{3x}\, e^{y\,(2-x)}}{x-2}$$

$$\therefore \quad z = \frac{e^{3x+2y}}{x-2}$$

$\therefore$ முழுத்தீர்வு

$$z = e^{xy}\left[\, y\,\varphi(x) + f(x)\,\right] + \frac{e^{3x+2y}}{x-2}$$

பயிற்சி 14·4

பின்வரும் சமன்பாடுகளின் தீர்வு காண்க.

(1) $(D_y - x)(D_y + \overline{x-1})\, z = 0$

(2) $(D_y - x)(D_y + x)\, z = e^{x+y}$

பயிற்சி 14·5

பின்வரும் சமன்பாடுகளின் தீர்வு காண்க.

(1) $(D_y^2 - 2\, D_y - 3)\, z = 0$

(2) $(D_y^2 - 3\, D_y + 2)\, z = e^{3y+2x}$

(3) $(D_x^2 - 4\, D_x + 3)\, z = 0$

(4) $(D_x^2 - 6\, D_x - 7)\, z = e^{2x+y}$

(5) $(D_y - x)(D_y + \overline{x-1})\, z = 0$

(6) $(D_y - x)(D_y + x)\, z = e^{x+y}$

(7) $(D_x + y)(D_x - y)\, z = e^{x+3y}$

(8) $(D_x + 2y)(D_x - 2y)\, z = \cos 3x$

(9) $(D_x + 3y)(D_x - 4y)\, z = \sin x$

விடை 14·4

(1) $z = \dfrac{e^{xy}}{2x-1}\, \varphi(x) + F(x)\, e^{-(x-1)y}$

(2) $z = \dfrac{e^{xy}}{2x}\, \varphi(x) + F(x)\, e^{-xy} + \dfrac{e^{x+y}}{1-x^2}$

விடை 14·5

(1) $z = e^{3y} \varphi(x) + F(x)\, e^{-y}$

(2) $z = e^{2y}\varphi(x)+e^{y}F(x)+\dfrac{e^{2x+3y}}{2}$

(3) $z = e^{3x}\varphi(y)+e^{x}F(y)$

(4) $z = e^{7x}\varphi(y)+e^{-x}F(y)-\dfrac{e^{2x+y}}{15}$

(5) $z = e^{xy}\varphi(x)+e^{-(x-1)y}F(y)$

(6) $z = e^{xy}\varphi(x)+e^{-xy}F(x)+\dfrac{e^{x+y}}{1-x^2}$

(7) $z = e^{xy}\varphi(y)+e^{-xy}F(y)+\dfrac{e^{x+3y}}{1-y^2}$

(8) $z = e^{2xy}\varphi(y)+e^{-2xy}F(y)-\dfrac{\cos 3x}{4y^2+9}$

(9) $z = e^{-3xy}\varphi(y)+e^{4xy}F(y)-\dfrac{(12y^2+1)\sin x-y\cos x}{144y^4+25y^2+1}$

15. பகுதி வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகள் – இரண்டும் அதற்கு மேற்பட்ட வரிசைகளும் – ஒரு படிக்குரிய சம படித்தான சமன்பாடுகள்

(Partial differential equations—Second and higher orders—Linear and Homogeneous)

15·01 : பகுதி வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகள்; வரையறைகள்.

(i) $x^2 \dfrac{\delta^3 z}{\delta x^3} + x^2 y \dfrac{\delta^3 z}{\delta x\, \delta y^2} + x \dfrac{\delta^3 z}{\delta x^2\, \delta y} + \dfrac{\delta^3 z}{\delta y^3} = x^2 + y$

என்ற சமன்பாட்டில் எல்லா வகைக்கெழுக்களும் ஒரே வரிசை-மூன்றாவது வரிசை—யில் உள்ளன. இப்படியாக, ஒரு படிக்குரிய சமன்பாட்டில் வகைக்கெழுக்கள் ஒரே வரிசையிலிருப்பின் அது ஓர் 'ஒரு படிக்குரிய, சம படித்தான சமன்பாடு' எனப்படும். (ஆனால் இதைப்பற்றிப் பல நூலாசிரியர்கள் கருத்தொருமித்தவர் களாயில்லை.)

$x \dfrac{\delta^2 z}{\delta x^2} + y \dfrac{\delta^2 z}{\delta x\, \delta y} + \dfrac{\delta^2 z}{\delta y^2} = 0$ என்பதும் ஓர் 'ஒரு படிக் குரிய சம படித்தான சமன்பாடு' (இரண்டாம் வரிசை)

(ii) $A \dfrac{\delta z}{\delta x} + B \dfrac{\delta z}{\delta y} = 0$ (முதல் வரிசை) ...(1)

$A \dfrac{\delta^2 z}{\delta x^2} + B \dfrac{\delta z}{\delta x\, \delta y} + C \dfrac{\delta^2 z}{\delta^2 y} = x + 2y$ ...(2)

என்பவற்றில் A, B, C மாறிலிகள்,

இவை மாறிலிக் கெழுக் கொண்ட ஒருபடித்தான சமன்பாடுகள் எனப்படும்.

15-1 : நாம் 'வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகள் : புத்தகம் I' பகுதி 4-ல் கண்ட சமன்பாடுகளின் தீர்வுகள் காணும் முறைகளையே சற்று தேவையான மாறுதல்களோடு இப்பகுதியில் பயன்படுத்தப் போகிறோம். அங்கு

$f(D)\,y = X(x)$

என்று சமன்பாட்டைச் 'செயலி' கொண்டு எழுதியதுபோல, இங்கு

$$D_x = \frac{\delta}{\delta x}\ ;\ D_x D_y = \frac{\delta^2}{\delta x \delta y}\ ;\ D_x^2 = \frac{\delta^2}{\delta x^2}\ ,$$

$D_y^2 = \dfrac{\delta^2}{\delta y^2}$; .... என்ற செயலிகளைப் பயன்படுத்த விருக்கிறோம். இந்தக் குறியீடுகளையொட்டி, கீழே குறிப்பிட்டிருக்கும் சமன்பாடுகளை

$f(D_x, D_y)\, z \equiv (AD_x + BD_y)\, z = 0$ எனவும், ...(1)

$f(D_x, D_y)\, z \equiv (AD_x^2 + BD_x + D_y + CD_y^2)\, z = 0$ எனவும் ...(2)
எழுதலாம்.

மேலும் பொதுவாக,

$$f(D_x, D_y)\, z \equiv D_x^{\,n} + p_1 D_x^{\,n-1} D_y + P_2 D_x^{\,n-2} D_y^2$$
$$+ \ldots\ldots\ldots P_n D_y^n)\, z = 0 \qquad \ldots(3)$$

என்று, ஒரு பொது அமைப்பைப் பெறலாம்.

15-2 : $(AD_x + BD_y)\, z = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வினைக் காண்போம்.

இதை $Ap + Bq = 0$ எனவும் எழுதலாம். இதன் தீர்வு காண் முறை, பகுதி 13·1-ல் கொடுக்கப்பட்டிருப்பதைக் காண்க.

ஆனால் மற்றொரு முறையை இங்குக் கடைப்பிடிப்போம். இது வ.ச. புத்தகம் I, 4·31-ல் கடைப்பிடித்த முறையைத் தழுவியிருப்பது காணலாம்.

$z = \varphi(y + mx)$ என்பது $Ap + Bq = 0$-ன் ஒரு தீர்வு எனவும், $u = y + mx$ எனவும் கொள்வோம்.

எனவே $z=\varphi(u)$; $u=y+mx$.

$$\therefore\ p=D_xz=\frac{\delta z}{\delta x}$$

$$=\frac{\delta\varphi}{\delta x}$$

$$=\frac{d\varphi}{du}\cdot\frac{\delta u}{\delta x}$$

$$=m\frac{d\varphi}{du} \qquad \ldots(1)$$

$$q=D_y\,z=\frac{\delta z}{\delta y}$$

$$=\frac{\delta\varphi}{\delta y}$$

$$=\frac{d\varphi}{du}\cdot\frac{\delta u}{\delta y}$$

$$=\frac{d\varphi}{du} \qquad \ldots(2)$$

D_xz, D_yz என்பவற்றிற்கு (1), (2)-ல் கண்ட முடிவுகளை ஈடு செய்தால்.

$A\,m\,\dfrac{d\varphi}{du}+B\,\dfrac{d\varphi}{du}=0$ என வரும்.

$\dfrac{d\varphi}{du}$ என்பது பொதுவாகப் பூச்சியமாகாதாதலின்

$Am+B=0$ என வரும்.

$\therefore\ m=-\dfrac{B}{A}$ என வரும்.

எனவே $\varphi(y+mx)=\varphi\left(y-\dfrac{B}{A}x\right)$ என வரும்.

ஆகவே $(AD_x+BD_y)z=0$ என்ற சமன்பாட்டின் பொதுத் தீர்வு $\varphi\left(y-\dfrac{B}{A}x\right)=z$ என்பதாகும்.

இதைச் சரி பார்ப்போம் :

$$D_x z = \varphi'\left(-\frac{B}{A}\right)$$

$$D_y z = \varphi'(1)$$

$$\therefore \quad (AD_x+BD_y)\, z = A\,\varphi'\left(-\frac{B}{A}\right)+B\,\varphi'$$

$$= -B\,\varphi'+B\,\varphi'$$

$$= 0$$

எனவே $(AD_x+BD_y)\, z=0$ என்ற சமன்பாட்டின்

பொதுத் தீர்வு, $z=\varphi\left(y-\frac{B}{A}x\right)$

இங்கு φ என்பது 'தன்னிச்சையான' ஒரு சார்பு.

15-2·1 : எனவே பின் வருமாறு ஒரு செய்முறை வகுக்கலாம்.

$(AD_x+BD_y)\, z=0$ என்ற சமன்பாட்டில், D_x-க்குப் பதிலாக m என ஈடு செய்து, D_y-க்குப் பதிலாக '1' என ஈடு செய்து,

$Am+B=0$ என்று கண்டு,

$m=-\frac{B}{A}$ எனக் கண்டு கொள்க.

பின்னர் $z=\varphi\left(y-\frac{B}{A}x\right)$ என எழுதுக.

$Am+B=0$ என்பதைத் துணைச் சமன்பாடு எனக் கூறுவோம்.

குறிப்பு : $Ap+Bq=0$ என்ற சமன்பாட்டிற்கு முன்னர் பகுதி 13-ல் அமைப்பு I என்ற அமைப்பின்படி தீர்வு காண்போம்.

அமைப்பு I முறைப்படி,

$z=mx+y+c$ என்று தீர்வினை ஏற்றால் $Am+B=0$ என்ற கட்டுப்பாடு தேவைப்படும்; அதாவது $m=-\frac{B}{A}$ எனப் பெறுவோம்.

$\therefore$ $Ap+Bq=0$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வு,

$$z = -\frac{B}{A}x+y+c$$

இதைப் பொதுப்படுத்தினல்,

$z=\varphi\left(y-\frac{B}{A}x\right)$ என்ற பொது அமைப்பில் தீர்வு கிடைக்கும். [பகுதி 13, அமைப்பு I காண்க.]

எடுத்துக்காட்டு 1 :

$(2D_x+3D_y)\ z \equiv 2p+3q=0$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வு காண்க.

$z = ax + by + c$; கட்டுப்பாடு $2a + 3b = 0$; அதாவது $a=-\frac{3}{2}b$

$$\therefore \text{ தீர்வு } z = -\frac{3}{2}bx+by+c$$

$$=b\left(y-\frac{3}{2}x\right)+\frac{c}{b}$$

இதைப் பொதுப்படுத்தி b, c என்ற மாறிலிகளைச் சார்பமைப் பில் கலந்துவிட்டால்,

$z=\varphi\left(y-\frac{3}{2}x\right)$ என்ற பொதுத் தீர்வு கிடைக்கும்.

செய்முறையென 15-2·21-ல் விளக்கிய முறையைக் கையாண் டால், துணைச் சமன்பாடாக,

$2m+3=0$ என்ற சமன்பாடு கிடைக்கும்.

$$m = -\frac{3}{2}$$

$\therefore$ பொதுத் தீர்வு, $z = \varphi\left(y-\frac{3}{2}x\right)$

எடுத்துக் காட்டு 2 :

$(aD_x+bD_y)\ z \equiv ap+bq=0$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வு காண,

$am+b=0$ என எழுதி,

$m = -\dfrac{b}{a}$ எனக் கண்டு,

$z = \varphi\left(y-\dfrac{b}{a}x\right)$ என எழுதலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 3 :

$(D_x-mD_y)\ z \equiv p-mq=0$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வு காண்க.

துணைச் சமன்பாடு, $M-m=0$ என எழுதினல்,

$M=m$ என வரும்.

$\therefore\ z=\varphi\ (y+mx)$ எனத் தீர்வினை எழுதலாம்.

பகுதி 13, அமைப்பு I-ன்படி, $p-mq=0$ என்பதன் தீர்வு, $z=ax+by+c$; கட்டுப்பாடு $a-bm=0$

அதாவது $a=bm$ என வரும்.

$\therefore\ z=bmx+by+c$

$=b\ (mx+y)+\dfrac{c}{b}$

இதைப் பொதுப்படுத்தி, b, c இரண்டையும் சார்பில் கலந்துவிட்டால்,

$z=\varphi\ (y+mx)$ என வருவது காண்க.

எனவே $(D_x-mD_y)z=0$ என்ற சமன்பாட்டின் பொதுத் தீர்வு $z=\varphi\ (y+mx)$ என்பதைக் கவனத்தில் வைக்கவும். பின்னர் இது பயன்படுவது காணலாம்.

பயிற்சி 15·1

பின்வரும் சமன்பாடுகளின் பொதுத் தீர்வுகளைக் காண்க.

(1) $(D_x+2D_y)\ z = 0$

(2) $(D_x-m^2D_y)\ z = 0$

(3) $[(l^2+m^2)\ D_x-(l^2-m^2)\ D_y]\ z=0$

விடை 15·1

(1) $z = \varphi (y-2x)$

(2) $z = \varphi (y+m^2x)$

(3) $z = \varphi \left(y + \frac{l^2-m^2}{l^2+m^2}\ x \right)$

15-2·2 : இப்பொழுது $(AD_x^2+BD_xD_y+CD_y^2)\ z=0$ ...(1) என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வு காண்போம்.

இச் சமன்பாட்டிற்கு $z=\varphi\ (y+mx)$ என்பது ஒரு தீர்வெனவும், $y+mx=u$ எனவும் கொள்வோம்.

அதாவது $z=\varphi\ (u)$; $u=y+mx$ என்பது பொருத்தம். மேலும் $\frac{\delta u}{\delta x} = m$; $\frac{\delta u}{\delta y} = 1$ என்பதும் நாம் பெறுகிறோம்.

$$(D_x)\ z=(D_x)\ \varphi$$

$$= \frac{\delta}{\delta x}\ (\varphi) = \frac{d\varphi}{du}\ \ \frac{\delta u}{\delta x} = m\ \frac{d\varphi}{du}$$

$$(D_y)\ z = \frac{\delta}{\delta y}\ (\varphi) = \frac{d\varphi}{du}\ \ \frac{\delta u}{\delta y} = \frac{d\varphi}{du}$$

$$(D_x^2)\ z=D_x\ (D_x)\ z = D_x\left(m\ \frac{d\varphi}{du}\right) = \frac{d}{du}\left(m\ \frac{d\varphi}{du}\right)\ \frac{\delta u}{\delta x}$$

$$=m^2\ \frac{\varphi\, d^2}{du^2}$$

அவ்வாறே

$$(D_y^2)\ z = D_y\,(D_y)\ z=D_y\left(\frac{d\varphi}{du}\right)$$

$$= \frac{d}{du}\left(\frac{d\varphi}{du}\right)\frac{\delta u}{\delta y} = \frac{d^2\varphi}{du^2}$$

மேலும்

$$(D_xD_y)\ z = D_x\,(D_y)\ z = D_x\left(\frac{d\varphi}{du}\right)$$

$$= \frac{d}{du}\left(\frac{d\varphi}{du}\right)\ \frac{\delta u}{\delta x} = m\ \frac{d^2\varphi}{du^2}$$

இம் மதிப்புகளை ஈடு செய்தால்,

$(AD_x^2=BD_xD_y+CD_y^2)\ z$ என்பது

$(Am^2+Bm+C)\ \frac{d^2\varphi}{du^2}$ என்றாகும்.

அப்பொழுது, சமன்பாடு

$(Am^2+Bm+C)\ \frac{d^2\varphi}{du^2}=0$ எனவாகும்.

பொதுவாக $\frac{d^2\varphi}{du^2}\neq 0$ ஆதலால்,

$Am^2+Bm+C=0$ ஆனுல்தான்,

$z=\varphi\ (y+mx)$ என்பது கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டின் ஒரு தீர்வாகும்.

ஆகவே $Am^2+Bm+C=0$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வுகள் $m=m_1$ அல்லது m_2 என இரு வேறுபட்ட தீர்வுகள் (மெய்யெண் கள்) என முதலில் கொள்வோம்.

[அதாவது $Am^2+Bm+C\equiv A\ (m-m_1)\ \ (m-m_2)$; m_1, m_2 வேறுபட்ட மெய்யெண்கள்]

$z=\varphi_1\ (y+m_1x)$ என்பதும்,

$z=\varphi_2\ (y+m_2x)$ என்பதும்,

இரு தீர்வுகளாகும். எனவே,

$z=\varphi_1\ (y+m_1x)+\varphi_2\ (y+m_2x)$ என்பதும்,

$(AD_x^2+BD_xD_y+CD_y^2)\ z=0$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர் வாகும்.

குறிப்பு 1

15·21-ல் குறிப்பிட்ட செய்முறையை விரிவு செய்து கடைப் பிடிப்போமானுல்

D_x-க்குப் பதிலாக m

D_x^2-க்குப் பதிலாக m^2

D_y-க்குப் பதிலாக 1

D_y^2-க்குப் பதிலாக 1

$D_x \ D_y$-க்குப் பதிலாக $m \times 1$ என ஈடு செய்வோமாகுல் $(AD_y^2 + BD_x \ D_y + CD_x^2) \ z = 0$ என்ற சமன்பாட்டைத் தீர்க்க, நமக்குக் கிடைக்கும் சமன்பாடு,

$Am^2 + Bm + C = 0$ எனப் பெறப்படுவதைக் காணலாம். இந்த இயற் கணிதச் சமன்பாட்டின் தீர்வுகளைக் கண்டால் நாம் தீர்வு காண விரும்பிய சமன்பாட்டின் தீர்வுகள் பெறப்படும்.

இதையொட்டி,

$(AD_x^2 + BD_x D_y + CD_y^2) \equiv A(D_x - m_1 D_y) \ (D_x - m_2 D_y)$ என எழுதலாமெனக் காண்க.

மேற்கூறியதன் வலப்புறம் $\equiv A[D_x^2 - m_1 + m_2) D_x D_y + m_1 m_2 D y^2]$

$m_1 + m_2 = -\frac{B}{A}$; $m_1 m_2 = \frac{C}{A}$ என நமக்குத் தெரியுமாதலால்,

$$A\left[D_x^2 - (m_1 + m_2) \ D_x D_y + m_1 m_2 D_y^2\right] \equiv A\left[D_x^2 + \frac{B}{A} D_x \ D_y + \frac{C}{A} D_y^2\right]$$

$$\equiv (AD_x^2 + BD_x D_y + CD_y^2)$$

செயலிகள் D_x, D_y சாதாரண இயற் கணித இராசிகளைப் போலவே பயன்படுத்தப்படுவது காண்க.

15-2·3 : இந்த முறையை மற்றும் விரிவு செய்வோமாகுல் $(AD_x^3 + BD_x^2 D_y + CD_x D_y^2 + ED_y^3) \ z = 0$ என்ற சமன்பாட்டிற்கு, முதலில்

$Am^3 + Bm^2 + Cm + E = 0$ என்ற துணைச் சமன்பாட்டின் தீர்வுகளான m_1, m_2, m_3 கண்டு, கொடுக்கப்பட்ட பகுதி வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் முழுத் தீர்வு,

$z = \varphi_1 \ (y + m_1 x) + \varphi_2 \ (y + m_2 x) + \varphi_3 \ (y + m_3 x)$ என எழுதலாம்.

குறிப்பு : இம்முறை வ. ச. புத்தகம் I, பகுதி 4-ல் விளக்கப்பட்ட முறையைத் தழுவியிருப்பது காண்க.

15-2·3·1 இன்னும் மேற்கண்டவற்றைப் பொதுப்படுத்துவோம்.

$$f(D_x, D_y)\, z \equiv \left(D_x^n + P_1 D_x^{n-1} D_y + P_2 D_x^{n-2} D_y^2 + \ldots\ldots P_n D_y^n \right) z = 0 \qquad \ldots(A)$$

என்ற பொதுச் சமன்பாட்டை எடுத்துக் கொள்வோம்.

முன் பத்திகளில் விளக்கப்பட்டதையொட்டி, $D_x = m$, $D_y = 1$ என ஈடு செய்து ஒரு துணைச் சமன்பாடு காணலாம்.

$$(m^n + P_1 m^{n-1} + P_2 m^{n-2} + \ldots\ldots + P_n) = 0 \qquad \ldots(A)$$

என்ற துணைச் சமன்பாடான சாதாரண இயற்கணிதச் சமன்பாட்டின் தீர்வுகள் $m_1 \neq m_2 \neq m_3 \neq \ldots \neq m_n$ எனவிருப்பின், கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டின் பொதுத் தீர்வு $z = \varphi_1(y+m_1x) + \varphi_2(y+m_2x) + \ldots\ldots + \varphi_n(y+m_nx)$ என $\underline{n}$ தம்மிச்சையான சார்புகளின் கூட்டுத் தொகையாக வரும்.

15-2·3·2 : முன்பு 15-2·3·1-ல் (A) என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வுகள், வெவ்வேறு மெய்யெண் தீர்வுகளாய் வரின், மேற்கூறிய தீர்வு பொருந்தும்.

அல்லாது, $m_1 = m_2 = \ldots = m_k \neq m_{k+1} \neq \ldots \neq m_n$ என K தீர்வுகள் சமமான மெய்யெண் தீர்வுகளாயும், எஞ்சியவை வெவ்வேறு மெய்யெண் தீர்வுகளாயும் வருங்கால், n 'தன்னிச்சையான' சார்புகள் கட்டாயம் முழுத் தீர்வில் தோன்ற வேண்டியிருப்பதால், தீர்வானது,

$z = \varphi_1(y+m_1x) + x\varphi_2(y+m_1x) + \ldots\ldots + x^{k-1}\varphi_k(y+m_1x) + \varphi_{k+1}(y+m_{k+1}x) + \ldots\ldots + \varphi_n(y+m_nx)$ என்ற அமைப்பில் வரும். $\varphi_1, \varphi_2 \ldots \varphi_n$ யாவும் தம்மிச்சையான சார்புகளாம்.

குறிப்பு : எடுத்துக்காட்டாக,

$(D_x^2 - 2aD_xD_y + a^2D_y^2)\, z = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வு,

$z = \varphi_1(y+ax) + x\varphi_2(y+ax)$ என வருகிறதா எனச் சரிபார்க்கலாம். இதற்குப் பகுதி வகைக்கெழுக்கள் காண்போம்.

$$D_x z = a\varphi_1'(y+ax) + \varphi_2(y+ax) + xa\,\varphi_2'(y+ax)$$

$$D_x^2 z = a^2\varphi_1''(y+ax) + a\varphi_2'(y+ax) + a\varphi_2'(y+ax) + xa^2\varphi_2''(y+ax)$$

$$= a^2\varphi_1''(y+ax) + 2a\varphi_2'(y+ax) + xa^2\varphi_2''(y+ax)$$

$$D_y z = \varphi_1'(y+ax) + x\varphi_2'(y+ax)$$

$$D_y^2 z = \varphi_1''(y+ax) + x\varphi_2''(y+ax)$$

$$(D_x D_y)\,z = D_x[\varphi_1'(y+ax) + x\varphi_2'(y+ax)]$$

$$= a\varphi_1''(y+ax) + \varphi_2'(y+ax) + xa\varphi_2''(y+ax)$$

$$\therefore\ (D_x^2 - 2a\,D_x D_y + a^2 D_y^2)\,z$$

$$= a^2\varphi_1''(y+ax) + 2a\,\varphi_2'(y+ax) = xa^2\varphi_2''(y+ax)$$

$$-2a^2\varphi_1''(y+ax) - 2a\varphi_2'(y+ax) - 2xa^2\varphi_2''(y+ax)$$

$$+a^2\varphi_1''(y+ax) + xa^2\varphi_2''(y+ax)$$

$= 0$ என்பது காண்க.

இதன் விரிவான உண்மையைக் கணித உய்த்தறிதல் முறைப் படி (**Mathematical Induction**) நிறுவலாம்; எனவே இதையும், இதன் விரிவினையும் ஏற்கலாம்.

15-2·3·3

முன்பு 15-2·3·1-ல் (A) என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வுகள், இரண்டு $\alpha+i\beta$, $\alpha-i\beta$ என வரின், அந்த இரண்டு தீர்வுகளுக்கு மட்டும் பொருத்தமான பொதுத் தீர்வுப் பகுதியானது,

$$\varphi_1(y+\alpha x+i\beta x) + \varphi_1(y+\alpha x-i\beta x)$$

$$+ i[\varphi_2(y+\alpha x+i\beta x) - \varphi_2(y+\alpha x-i\beta x)]$$

என அமையும்.

குறிப்பு : (1) $\varphi_1(u) = \cos u$ எனவும், $\varphi_2(u) = \sin u$ எனவும் கொண்டு சரிபார்த்துக் கொள்க. பயிற்சியாக ஏற்பது நல்லது.

(2) $i-$ஐப் பெருக்கும் உறுப்பில் ஒரு குறைக் குறி (**minus**) வருவதைச் சிறப்பாகக் கவனத்தில் கொள்க.

15-2·3·4. எடுத்துக்காட்டு 1 : தீர்வு காண்க:

$(D_x^2-8D_xD_y+15D_y^2)z=0$

இதற்குரிய துணைச் சமன்பாடு,

$m^2-8m+15=0$

இதன் தீர்வுகள் 3, 5.

எனவே பொது முழுத் தீர்வு

$z=\varphi_1(y+3x)+\varphi_2(y+5x)$ என்பதாம்.

எடுத்துக்காட்டு 2 : தீர்வு காண்க:

$(D_x^2-4D_xD_y+4D_y^2)z=0.$

இதற்குரிய துணைச் சமன்பாடு

$m^2-4m+4=0$

இதன் தீர்வுகள் 2, 2 என்ற சமமான தீர்வுகள்.

எனவே பொதுத் தீர்வு,

$z=\varphi_1(y+2x)+x\varphi_2(y+2x)$ என்பதாம்.

எடுத்துக்காட்டு 3 : தீர்வு காண்க.

$(D_x^3-5D_x^2D_y+17D_xD_y^2-13D_y^3)z=0$

இதற்குரிய துணைச் சமன்பாடு,

$m^3-5m^2+17m-13=0$

இதை $(m-1)(m^2-4m+13)=0$ என எழுதலாம்.

$m^2-4m+13=0$ என்பதன் தீர்வுகள்,

$m=2\pm\sqrt{4-13}=2\pm3i$

எனவே 3 தீர்வுகளாவன, $m=1$, $m=2+3i$, $m=2-3i$.

எனவே பொதுத் தீர்வு,

$$z=\varphi_1(y+x)+\varphi_2(y+2x+3ix)+\varphi_2(y+2x-3ix)$$
$$+i[\varphi_3(y+2x+3ix)-\varphi_3(y+2x-3ix)]$$

மூன்று தம்மிச்சையான சார்புகள் $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ தோன்றுவது காண்க.

பயிற்சி 15·2

பின் வரும் சமன்பாடுகளின் பொதுத் தீர்வு காண்க.

(1) $(D_x^2-D_xD_y-6D_y^2)z=0$

(2) $(D_x^4-D_x^3D_y+2D_x^2D_y^2-5D_xD_y^3+3D_y^4)z=0$

(3) $(D_x^2-a^2D_y^2)z=0$

(4) $(a^2D_x^2-D_y^2)z=0$

(5) $(D_x^2-3D_xD_y)z=0$

(6) $(D_xD_y-3D_y^2)z=0$

(7) $(D_x^2-(a+b)D_xD_y+abD_y^2)z=0$

(8) $(D_x^3D_y^2+D_x^2D_y^3)z=0$

(9) $(D_x^4-D_y^4)z=0$

விடைகள் 15·2

(1) $z=\varphi_1(y-2x)+\varphi_2(y+3x)$

(2) $z=\varphi_1(y+x)+x\varphi_2(y+x)$
$+\varphi_3[y-\frac{1}{2}(1+\sqrt{11}\,i)x]+\varphi_3[y-\frac{1}{2}(1-\sqrt{11}\,i)x]$
$+i[\varphi_4\{y-\frac{1}{2}(1+\sqrt{11}\,i)x\}-\varphi_4\{y-\frac{1}{2}(1-\sqrt{11}\,i)x\}]$

(3) $z=\varphi(y+ax)+F(y\quad ax)$

(4) $z=\varphi\left(y+\frac{x}{a}\right)+F\left(y-\frac{x}{a}\right)$

(5) $z=\varphi(y)+F(y+3x)$

(6) $z=\varphi(x)+F(y+3x)$

(7) $z=\varphi(y+ax)+F(y+bx)$

(8) $z=\varphi_1(y)+x\varphi_2(y)+\varphi_3(x)+y\varphi_4(x)+\varphi_5(y-x)$

(9) $\varphi_1(y+x)+\varphi_2(y-x)+\varphi_3(y+ix)+\varphi_3(y-ix)$
$+i[\varphi_4(y+ix)-\varphi_4(y-ix)]$

15-3 : இனி, $f\,(D_x, D_y)z = F\,(x,y)$ .. (B)
என்ற அமைப்பிலுள்ள பகுதி வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகளின் தீர்வுகள் காண்போம்.

முன்னர் வ. ச. புத்தகம் I-ல்

$f\,(D)\,y = F\,(x)$ என்ற அமைப்பில் நாம்,

$y =$ துணைத் தீர்வு + சிறப்புத் தீர்வு என முழுத் தீர்வு கண்டமாதிரியே, இங்கும், $z =$ துணைத் தீர்வு+சிறப்புத் தீர்வு காண்போம்.

$f\,(D_x, D_y)z = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் பொதுத் தீர்வுதான் (B) ன் துணைத் தீர்வு எனப்படும்.

இங்கு நான்கு சிறப்பமைப்புகள்

(i) $F\,(x, y) = e^{\alpha x + \beta y}$

(ii) $F\,(x, y) = \sin\,(\alpha x + \beta y)$

(iii) $F\,(x, y) = \cos\,(\alpha x + \beta y)$

(iv) $F\,(x, y) = x^{\alpha} y^{\beta}$

என்ற வகையில் வலக்கைப்புறம் அமையுமாயின் சிறப்புத் தீர்வுகள் காண வாய்பாடுகள் பெற முயற்சி செய்வோம்.

15-3·1 : முதல் முதலாக,

$$f\,(D_x, D_y)\,\frac{1}{f\,(D_x\,D_y)}\;z = z$$

என்பதை அடிப்படையாக ஏற்றுக் கொள்வோம்.

$f\,(D_x, D_y)$ என்ற செயலியும் $\dfrac{1}{f\,(D_x, D_y)}$ என்பதும் ஒன்றுக்கொன்று தலைகீழ்ச் செயலி எனப்படும்.

இரண்டாவதாக,

$f(D_x, D_y)$ என்பதைக் காரணிகளாகப் பிரித்து,

$f(D_x, D_y) \equiv (D_x - m_1 D_y)\,(D_x - m_2 D_y) \ldots (D_x - m_n D_y)$

என்ற முறையில் எழுதலாம். இங்குத் தோன்றும்

$m_1, m_2, \ldots\ldots m_n$ என்பவை $f(m,1)=0$ என்ற இயற்கணிதச் சமன்பாட்டின் தீர்வுகள் ஆகும்.

ஏனெனில்,

$$f(D_x, D_y) \equiv D_x^n + P_1 D_x^{n-1} D_y + P_2 D_x^{n-2} D_y^2 + \ldots\ldots + P_n D_y^n$$

$$f(m, 1) \equiv m^n + P_1 m^{n-1} + P_2 m^{n-2} + \ldots\ldots + P_n$$
$$\equiv (m-m_1)(m-m_2)\ldots\ldots(m-m_n)$$

15-3·1·1. இந்த அடிப்படை உண்மைகளைக் கொண்டு $f(D_x, D_y)z = F(x, y)$ எனக் கொடுக்கப்பட்டிருப்பின்

$$z = \frac{1}{f(D_x D_y)} F(x, y)$$
$$= \frac{1}{(D_x - m_1 D_y)\ldots\ldots(D_x - m_n D_y)} \times F(x, y)$$

முறையாக வலப்பக்க மதிப்பை அறிய முடியும்.

$$u_1 = \frac{1}{(D_x - m_n D_y)} F(x, y)$$

$$u_2 = \frac{1}{(D_x - m_{n-1} D_y)} u_1$$

$$u_n = \frac{1}{(D_x - m_1 D_y)} u_{n-1}$$ எனப் பெற முடியும்.

$$u = \frac{1}{(D_x - mD_y)} \varphi(x, y)$$ என்ற மதிப்பை நாம் கணிக்க முடியுமானல் போதுமானதல்லவா ?

ஆகவே $u = \frac{1}{(D_x - mD_y)} \varphi(x, y)$ என்ற மதிப்பைக் கண்டுபிடிப்போம்.

இது $p - mq = \varphi(x, y)$ என்ற அமைப்பில் உள்ளது.

$$p = \frac{\delta u}{\delta x}\ ;\ q = \frac{\delta u}{\delta y}$$

$p-mq=\varphi(x, y)$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வு காண, இலகிரான்ஜின் முறைப்படி,

$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{-m} = \frac{du}{\varphi(x, y)}$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வுகள் கண்டல் போதும்.

முதலிரண்டு சமன்பாடுகளிலிருந்து

$-mx = y+$ மாறிலி

அல்லது $y+mx =$ மாறிலி என வரும்.

$y+mx=a$ எனக் கொள்க.

இதைக் கொண்டு, முதல், மூன்ருவது உறுப்புகளை எழுதிஞல்

$$\frac{dx}{1} = \frac{du}{\varphi(x, y)}$$

$$= \frac{du}{\varphi(x, a-mx)}$$ என வரும்.

$$\therefore \quad u = \int \varphi(x, a-mx)dx$$

மாறிலியை நீக்கிவிட, தொகை கண்ட பின்பு a-க்குப் பதிலாக $y+mx$ என ஈடு செய்து விடுக.

அப்பொழுது u-ன் மதிப்பு பெறப்படும்.

அதாவது $u = \frac{1}{(D_x-mD_y)}\varphi(x, y)$-ன் மதிப்பு

$= \int \varphi(x, a-mx)\,dx$; கட்டுப்பாடு,

தொகை கண்டபின் $a=y+mx$ என ஈடு செய்து விடுக.

15-3·1·2. எடுத்துக்காட்டு 1 : $(D_x-3D_y)\,z=x+y$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வு காண்க.

$(D_x-3D_y)\,z=0$ என்பதன் தீர்வு,

$z=\varphi(y+3x)$; இது துணைத் தீர்வாகும்.

இப்பொழுது சிறப்புத் தீர்வு யாதெனில்

$$z = \frac{x+y}{D_x - 3D_y}$$

அதாவது $p-3q=x+y$

இதன் தீர்வு காண,

$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{-3} = \frac{dz}{x+y}$ எனத் துணைச் சமன்பாடுகளை எடுத்துக் கொள்வோம்.

$y=-3x+a$ என முதலிரண்டு சமன்பாடுகளிலிருந்து வரும். இதை மூன்றுவது உறுப்பில் ஈடு செய்ய,

$$\frac{dx}{1} = \frac{dz}{x-3x+a} = \frac{dz}{a-2x}$$

$$\therefore \quad z = \int (a-2x)\ dx$$

$$= ax - x^2$$

இங்கு $a=y+3x$ என ஈடு செய்தால்,

$$z = x\ (y+3x) - x^2$$

$=xy+2x^2$ என்ற தீர்வு வரும்.

எனவே முழுத் தீர்வு, $z=\varphi\ (y+3x)+xy+2x^2$ என வரும்.

எடுத்துக்காட்டு 2

எ. கா. 1-ன் தொடர்ச்சியாக,

$(D_x+2D_y)\ (D_x-3D_y)\ z=x-y$ என்ற சமன்பாட்டின் முழுத் தீர்வு காண்க.

பொதுத் தீர்வு $\varphi_1\ (y+3x)+\varphi_2\ (y-2x)=z$ எனப் பெற்று விடுகிறோம்.

சிறப்புத் தீர்வு, $z = \frac{x+y}{(D_x+2D_y)\ (D_x-3D_y)}$

முதலில் $(D_x+2D_y)\ z = \frac{x+y}{D_x-3D_y}$

$$= xy+2x^2$$

என வரும்.

எனவே, $z = \dfrac{xy+2x^2}{D_x+2D_y}$

அதாவது $p+2q=(xy+2x^2)$

எனவே இதன் தீர்வு காண,

$$\frac{dx}{1}=\frac{dy}{2}=\frac{dz}{+x\,(y+2x)}$$

என்ற சமன்பாடுகளின் தீர்வு காண வேண்டும்.

$2\,dx=dy$

$\therefore\ y=2\,x+a$ எனப் பெறுகிறோம்.

இதைக் கடைசி உறுப்பில் ஈடு செய்தால்,

$\dfrac{dx}{1}=\dfrac{dz}{+x\,(4x+a)}$ என வரும்.

$$\therefore\ \int +x\,(4x+a)\,dx=\int dz$$

$$\therefore\ z=\frac{4x^3}{3}+\frac{ax^2}{2}$$

a-க்குப் பதிலாக $(y-2x)$ ஈடு செய்தால்,

$$z=\frac{4x^3}{3}+\frac{x^2\,(y-2x)}{2}$$

$$=\frac{8x^3+3x^2y-6x^3}{6}$$

$$=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2y}{2}$$

இதுவே சிறப்புத் தீர்வாகும்.

எனவே முழுத் தீர்வு $z=\varphi_1\,(y+3x)+\varphi_2\,(y-2x)$

$$+\frac{x^3}{3}+\frac{x^2y}{2}$$

15-3·2 : முன்னர் வ.ச. புத்தகம் I-ல்

$$\frac{1}{f(D)} e^{ax} = \frac{1}{f(a)} e^{ax}$$ எனவும்,

$$\frac{1}{f(D^2)} \cos ax = \frac{1}{f(-a^2)} \cos ax$$ எனவும்.

$$\frac{1}{f(D^2)} \sin ax = \frac{1}{f(-a^2)} \sin ax$$ எனவும் பெற்ற விதமாக,

பின்வரும் வாய்பாடுகள் இங்கு இணையாகப் பெறப்படுகின்றன.

(i) $$\frac{1}{f(D_x, D_y)} e^{\alpha x+\beta y} = \frac{1}{f(\alpha, \beta)} e^{\alpha x+\beta y}$$

எனப் பெறலாம்.

ஆனால் $f(\alpha, \beta) \neq 0$ என்ற கட்டுப்பாடு தேவை.

அப்படி $f(\alpha, \beta)=0$ ஆனால்,

$$f(D_x, D_y) = \left(D_x - \frac{\alpha}{\beta} D_y\right)^r g(D_x, D_y)$$ என எழுதி,

[$g(\alpha, \beta) \neq 0$ என்ற கட்டுப்பாடு தேவை]

$$\frac{1}{\left(D_x - \frac{\alpha}{\beta} D_y\right)^r} \cdot \frac{1}{g(D_x, D_y)} e^{\alpha x+\beta y}$$

$$= \frac{1}{g(\alpha, \beta)} \cdot \frac{1}{\left(D_x - \frac{\alpha}{\beta} D_y\right)^r} e^{\alpha x+\beta y}$$

$$= \frac{1}{g(\alpha, \beta)} \cdot \frac{x^r}{\lfloor r} e^{\alpha x+\beta y}$$ எனப் பெறவேண்டும்.

(ii) அவ்வாறே,

$$\frac{1}{f(D_x^2, D_xD_y, D_y^2)} \sin(\alpha x+\beta y)$$

$$= \frac{1}{(f-\alpha^2, -\alpha\beta, -\beta^2)} \sin(\alpha x+\beta y)$$

(iii) $\frac{1}{f(D_x^2, D_xD_y, D_y^2)} \cos(\alpha x+\beta y)$

$$= \frac{1}{f(-\alpha^2, -\alpha\beta, -\beta^2)} \cos(\alpha x+\beta y)$$

எனவும் நிறுவலாம்.

ஆனால் $f(-\alpha^2, -\alpha\beta, -\beta^2) \neq 0$ என்ற கட்டுப்பாடு தேவையானது.

குறிப்பு :

$$f(D_x, D_y) \equiv (D_x^n+P_1D_x^{n-1} D_y+\dots\dots\dots+P_nD_y^n)$$

என இருப்பின்,

$$f(D_x, D_y)\, e^{(\alpha x+\beta y)}$$

$$= \left(\alpha^n \quad P_1\, \alpha^{n-1} \quad \beta +\dots\dots\dots+\beta^n\right) e^{(\alpha x+\beta y)}$$

$$= f(\alpha, \beta,)\, e^{\alpha x+\beta y}$$

என்பது பின்வரும் உண்மைகளால் எளிதில் பெறப்படும்.

$$D_x\, e^{\alpha x+\beta y} = \alpha e^{\alpha x+\beta y}$$

$$D_x^2\, e^{\alpha x+\beta y} = \alpha^2\, e^{\alpha x+\beta y}$$

... ...

$$D_x^n\, e^{\alpha x+\beta y} = \alpha^n\, e^{\alpha x+\beta y}$$

அவ்வாறே $D_y^n\, e^{\alpha x+\beta y} = \beta^n\, e^{\alpha x+\beta y}$

$$D_x D_y\, e^{\alpha_x+\beta_y} = \alpha\beta\, e^{\alpha x+\beta y}$$

அதையொட்டி,

$$\left(D_x^{n-m} \quad D_y^m\right) e^{\alpha x+\beta y} = D_x^{n-m} \left(\beta^m\, e^{\alpha x+\beta y}\right)$$

$$= \alpha^{n-m}\, \beta^m\, e^{\alpha x+\beta y}$$

எனவே,

$$f(D_x, D_y)\, e^{\alpha x+\beta y} = f(\alpha, \beta)\, e^{\alpha x+\beta y}$$

என எளிதில் புலப்படும்.

மேலும் $\dfrac{1}{f(D_x, D_y)}\, f(D_x, D_y)\, e^{\alpha x+\beta y} = e^{\alpha x+\beta y}$

(செயலி, தலைகீழ்ச் செயலி தொடர்ந்து செயற்படுகின்றன.)

ஆனால் $f(D_{x_1} D_y)\, e^{\alpha x+\beta y} = f(\alpha, \beta)\, e^{\alpha x+\beta y}$

$$\therefore \quad \frac{1}{f(D_x, D_y)} f(\alpha, \beta)\, e^{\alpha x+\beta y} = e^{\alpha x+\beta y}$$

$$\therefore \quad \frac{1}{f(D_x, D_y)}\, e^{\alpha x+\beta y} = \frac{1}{f(\alpha, \beta)}\, e^{\alpha x+\beta y}$$

ஆனால் $f(\alpha, \beta) \neq 0$ என்பது கட்டுப்பாடு.

15·3·21. எடுத்துக்காட்டு 1 :

$$(D_x^2 - 3D_xD_y + 2D_y^2)z = e^{2x+3y} + \sin(x-2y) + e^{x+y}$$

என்ற சமன்பாட்டின் முழுத் தீர்வு காண்க.

$$(D_x^2 - 3D_xD_y + 2D_y^2)\, z = (D_x - D_y)\,(D_x - 2D_y)\, z$$

வலப்புறம் பூச்சியமானால்

$z = \varphi(y+x) + F(y+2x)$ என்பது தீர்வு.

இது துணைத் தீர்வாகும்.

சிறப்புத் தீர்வு காண்போம்.

$$z_1 = \frac{1}{(D_x^2 - 3D_xD_y + 2D_y^2)}\, e^{2x+3y}$$

$$= \frac{1}{4 - 3\cdot 2\cdot 3 + 2\cdot 9}\, e^{2x+3y}$$

$$= \frac{1}{4}\, e^{2x+3y}$$

அடுத்து,

$$z_2 = \frac{1}{(D_x^2-3D_xD_y+2D_y^2)} e^{x+y}$$

$$= \frac{1}{1-3+2} e^{x+y} = \frac{1}{0} e^{x+y}$$

எனவே, இது பொருந்தாது.

$$\text{ஆகவே } z_2 = \frac{1}{(D_x-D_y)(D_x-2D_y)} e^{x+y}$$

$$= \frac{1}{(D_x-D_y)} \frac{e^{x+y}}{1-2}$$

$$= -\frac{1}{D_x+D_y} e^{x+y}$$

இதை $p-q = -e^{x+y}$ என எழுதலாம்.

$$\therefore \frac{dx}{1} = \frac{dy}{-1} = \frac{dz}{-e^{x+y}}$$

$\therefore$ $x = -y+a$ என முதலில் பெறலாம்.

இதைக் கடைசி உறுப்பில் ஈடு செய்தால்

$$dx = \frac{dz}{-e^a}$$

$\therefore$ $z_2 = -xe^a = -xe^{x+y}$ என வரும்.

அடுத்து,

$$z_3 = \frac{1}{(D_x^2-3D_xD_y+2D_y^2)} \sin(x-2y) \text{ பெறவேண்டும்.}$$

இங்கு D_x^2-க்குப் பதிலாக $-(1)^2$ என்ற மதிப்பும்,

D_xD_y-க்குப் பதிலாக $-(1)(-2)$ என்ற மதிப்பும்,

D_y^2-க்குப் பதிலாக $-(-2)^2$ என்ற மதிப்பும்

ஈடு செய்ய வேண்டும். அப்பொழுது

$$z_3 = \frac{1}{-1-6-8} \sin(x-2y) \text{ எனப் பெறலாம்.}$$

அதாவது $z_3 = -\frac{1}{15}\sin(x-2y)$

எனவே, முழுத் தீர்வு

$$z = \varphi(y+x) + F(y+2x) + \frac{1}{4}e^{2x+3y} - xe^{x-y}$$
$$- \frac{1}{15}\sin(x-2y)$$

குறிப்பு : இரண்டாவது நிலையில்

$-\frac{1}{(D_x-D_y)}e^{x+y}$ என்ற மதிப்பை நேரடியாக 15-3·2 (i)-ன் பிற்பகுதியிலுள்ள வாய்பாட்டைக் கொண்டும், $-x e^{x+y}$ என எழுதலாம். பயிற்சிக்காக, வாய்பாட்டைப் பயன்படுத்தாமல் இவ்வழி செய்து காட்டப்பட்டது.

அடுத்த எடுத்துக்காட்டில், இந்த வாய்பாடு நேரடியாகப் பயன்படுத்தப்படுவது காண்க.

எடுத்துக்காட்டு 2 :

$$(D_x-2D_y)^2(D_x+3D_y)z = e^{2x+y}$$

என்ற சமன்பாட்டின் சிறப்புத் தீர்வைக் காண்க.

$$z = \frac{1}{(D_x-2D_y)^2(D_x+3D_y)}e^{2x+y}$$
$$= \frac{1}{(2-2)^2(D_x+3D_y)}e^{2x+y}$$
$$= \frac{1}{0}\cdot\frac{1}{(D_x+3D_y)}e^{2x+y}$$

எனவே, இது பொருந்தாது.

$$\therefore \quad z = \frac{1}{(D_x-2D_y)^2}\;\frac{1}{(D_x+3D_y)}e^{2x+y}$$
$$= \frac{1}{(D_x-2D_y)^2}\;\frac{1}{2+3}e^{2x+y}$$
$$= \frac{x^2}{5\underline{|2}}e^{2x+y} \qquad \text{[15-32 : (i)-ன் பிற்பகுதி வாய்பாடு]}$$

எடுத்துக்காட்டு 3 :

$$(D_x+D_y)\ (D_x+2D_y)\ (D_x-3D_y)\ z = \sin(x+2y)+e^{3x+y}$$

என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வு காண்க.

துணைச் சமன்பாடாகிய

$(m+1)\ (m+2)\ (m+3)=0$ என்பதன் தீர்வுகள் $-1, -2, 3$.

எனவே, துணைத் தீர்வு

$$z=\varphi\ (y-x)+\phi\ (y-2x)+F\ (y+3x)$$

சிறப்புத் தீர்வு காண்போம் :

தீர்வில் ஒரு பகுதி

$$= \frac{1}{(D_x+D_y)\ (D_x^2-D_xD_y-6D_y^2)} \sin(x+2y)$$

$$= \frac{1}{(D_x+D_y)} \cdot \frac{1}{-1+2+24} \sin(x+2y)$$

$$= \frac{1}{25} \quad \frac{D_x-D_y}{D_x^2-D_y^2} \sin(x+2y)$$

$$= \frac{1}{25} \quad \frac{D_x-D_y}{-1+4} \sin(x+2y)$$

$$= \frac{1}{75}\left\{ \cos(x+2y)-2\cos(x+2y) \right\}$$

$$= -\frac{1}{75} \cos(x+2y)$$

தீர்வில் மற்றொரு பகுதி

$$= \frac{1}{(D_x+D_y)\ (D_x+2D_y)\ (D_x-3D_y)}\ e^{3x+y}$$

D_x-க்கு '3'-ம், D_y-க்கு '1'-ம் ஈடு செய்தால் D_x-3D_y பூச்சியமாகிவிடுவதால் சிறப்புத் தீர்வில் மேற்குறிப்பிட்ட பகுதி

$$= \frac{1}{(3+1)\ (3+2)\ (D_x-3D_y)}\ e^{3x+y}$$

$$= \frac{x\ e^{3x+y}}{20}$$

எனவே, முழுத் தீர்வு

$$= \text{துணைத் தீர்வு} + \text{சிறப்புத் தீர்வு}$$
$$= \varphi(y+x) + \phi(y-2x) + F(y+3x) - \frac{1}{75}\cos(x+2y) + \frac{1}{20}x\ e^{3x+y}$$

எடுத்துக்காட்டு 4 :

இங்கு $f(D_x, D_y)\ z = x^m\ y^n$ என்ற அமைப்பில் வரின், சிறப்புத் தீர்வு $z = \frac{1}{f(D_x, D_y)}\ x^m\ y^n$ என்பதை எப்படிக் காணலாம் என்ற முறையினை விளக்குவோம்.

முன்னர் $f(D)\ y = x^m$ என்ற அமைப்பில் நாம் y கண்ட முறையேதான் இங்கு உரிய மாறுதல்களோடு பயன்படுத்தப்படும். அங்கு ஈருறுப்புத் தேற்றத்தை உதவிக்குக் கொண்டோம். இங்கும் அதே தேற்றம் பயன்படும். (வ.ச. புத்தகம் I காண்க.)

$(D_x^3 - 7\ D_x\ D_y^2 - 6D_y^3)\ z = x^2 + xy^2 + y^3$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வு காண்போம்.

துணைச் சமன்பாடு $m^3 - 7m - 6 = 0$

அதாவது $(m+1)\ (m+2)\ (m+3) = 0$

எனவே துணைத் தீர்வு $z = \varphi(y-x) + \phi(y-2x) + F(y+3x)$.

சிறப்புத் தீர்வு

$$= \frac{1}{D_x^3 - 7\ D_x D_y^2 - 6\ D_y^3}(x^2 + xy^2 + y^3)$$
$$= \frac{1}{D_x^3\left(1 - 7\ \frac{D_y^2}{D_x^2} - 6\ \frac{D_y^3}{D_x^3}\right)}(x^2 + xy^2 + y^3)$$
$$= \frac{1}{D_x^3}\left(1 - 7\ \frac{D_y^2}{D_x^2} - 6\ \frac{D_y^3}{D_x^3}\right)^{-1}(x^2 + xy^2 + y^3)$$
$$= \frac{1}{D_x^3}\left(1 + 7\ \frac{D_y^2}{D_x^2} + 6\ \frac{D_y^3}{D_x^3}\ \cdots\cdots\right)(x^2 + xy^2 + y^3)$$

ஈருறுப்புத் தேற்றப்படி, D_y^3 உள்ள உறுப்பு வரை விரித்தெழுதப் பட்டிருக்கிறது. ஏனெனில் $D_y^3\ (y^3) = 6$; மேற்பட்ட வரிசையுள்ள பகுதி வகைக்கெழுக்கள் பூச்சியமாகி விடும்.

$$\frac{1}{D_x^3}(x^2+xy^2+y^3) = \iiint (x^2+xy^2+y^3)\,(dx)^3$$

$$= \frac{x^5}{60} + \frac{x^4y^2}{24} + \frac{x^3y^3}{6}.$$

$$\frac{1}{D_x^3}\cdot\frac{7D_y^2}{D_x^2}(x^2+xy^2+y^3) = \frac{7}{D_x^5}(2x+6y)$$

$$= 7\iiiint\int_x (2x+6y)\,(dx)^5$$

$$= 7\left[\frac{x^6}{360} + \frac{x^5y}{20}\right]$$

$$\frac{1}{D_x^3}\cdot\frac{6D_y^3}{D_x^3}\left(x^2+xy^2+y^3\right) = \frac{6}{D_x^6}(6)$$

$$= 36\int_x dx \quad \text{ஆறு முறை}$$

$$= \frac{36}{720}x^6$$

$$= \frac{1}{20}x^6$$

எனவே, சிறப்புத் தீர்வு

$$= x^6\left(\frac{1}{20}+\frac{7}{360}\right) + x^5\left(\frac{1}{60}+\frac{7}{20}y\right)$$

$$+\frac{1}{24}x^4y^2 + \frac{1}{6}x^3y^3$$

$$= \frac{5}{72}x^6 + \frac{1}{60}x^5(1+21y) + \frac{1}{24}x^4y^2 + \frac{1}{6}x^3y^3$$

துணைத் தீர்வுடன் இதைக் கூட்டி எழுதினால் முழுத் தீர்வு கிடைக்கும்.

எடுத்துக்காட்டு 5 :

$$(D_x^3+2D_x^2D_y-D_xD_y^2-2D_y^3)\,z = (y+2)\,e^x$$

என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வு காண்க.

துணைச் சமன்பாடு : $m^3+2m^2-m-2=0$

இதன் தீர்வுகள் 1, −1, −2.

எனவே துணைத் தீர்வு $= \varphi(y+x)+\phi(y-x)+F(y-2x)$ சமன்பாட்டை

$$(D_x-D_y)(D_x+D_y)(D_x+2D_y)z=(y+2)e^x$$

என எழுதலாம்.

சிறப்புத் தீர்வு

$$=\frac{y\,e^x}{(D_x-D_y)(D_x+D_y)(D_x+2D_y)}+\frac{2e^x}{(D_x-D_y)(D_x+D_y)(D_x+2D_y)}$$

இரண்டாவது பகுதி

$$=\frac{2\,e^x}{(1-0)(1+0)(1+0)}$$

$$=2e^x$$

முதற் பகுதி $=\dfrac{y.e^x}{(D_x-D_y)(D_x+D_y)(D_x+2D_y)}$

$u=\dfrac{y.e^x}{D_x+2D_y}$ எனக் கொள்வோம்.

$\dfrac{\delta u}{\delta x}+2\dfrac{\delta u}{\delta y}=ye^x$; இலகிராஞ்ஜி முறைப்படி

$$\frac{dx}{1}=\frac{dy}{2}=\frac{du}{ye^x}$$

$$\therefore\ y=2x+a$$

இதை மூன்றுவது உறுப்பில் ஈடு செய்தால்

$$dx=\frac{du}{(2x+a)\,e^x}$$

$$\therefore\ \int(2xe^x+ae^x)\,dx=u$$

$$\therefore\ u=2x\,e^x-\int 2e^x\,dx+\int ae^x\,dx$$

$$=2x\,e^x-2e^x+a.e^x$$

$$= 2x\,e^x - 2e^x + (y-2x)\,e^x \quad [\because \ y-2x=a]$$
$$= e^x\,(2x-2+y-2x)$$
$$= e^x\,(y-2)$$

இப்பொழுது $v = \dfrac{1}{(D_x+D_y)}\,e^x\,(y-2)$ எனக் கொள்வோம்.

$\therefore \quad (D_x+D_y)\,v = e^x\,(y-2)$

துணைச் சமன்பாடு $\dfrac{dx}{1} = \dfrac{dy}{1} = \dfrac{dv}{e^x\,(y-2)}$

$y = x+a$

இதை மூன்றாவது உறுப்பில் ஈடு செய்ய,

$dx = \dfrac{dv}{e^x\,(x+a-2)}$ என வரும்.

$$\therefore \quad v = \int e^x\,(x+a-2)\,dx$$
$$= xe^x - e^x + ae^x - 2e^x$$
$$= e^x\,(x+a-3)$$
$$= e^x\,(x+y-x-3) \quad [\because \ y=x+a]$$
$$= e^x\,(y-3)$$

இப்பொழுது $z = \dfrac{1}{(D_x-D_y)}\,e^x\,(y-3)$

$\therefore \quad (D_x-D_y)\,z = e^x\,(y-3)$

துணைச் சமன்பாடு $\dfrac{dx}{1} = \dfrac{dy}{1} = \dfrac{dz}{e^x\,(y-3)}$

$\therefore \quad y = -x+a$

இதை மூன்றாவது உறுப்பில் ஈடு செய்ய,

$dx = \dfrac{dz}{e^x\,(-x+a-3)}$

$$\therefore \quad z = \int e^x\,(-x+a-3)\,dx$$

$= -xe^x+e^x+ae^x-3e^x$

$= e^x(-x-2+a)$

$= e^x(-x-2+x+y) \quad [\because a=x+y]$

$= e^x(y-2)$

முழுமையான சிறப்புத் தீர்வு

$= e^x(y-2)+2e^x$

$= ye^x$

எனவே முழுத் தீர்வு,

$z=\varphi(y+x)+\phi(y-x)+F(y-2x)+ye^x$

எடுத்துக்காட்டு 6 :

$(D_x^3+D_x^2D_y-D_xD_y^2-D_y^3)\ z = e^x \cos 2y$ என்ற சமன்பாட்டின் முழுத் தீர்வு காண்க.

துணைத் தீர்வு காண, துணைச் சமன்பாடு,

$m^3+m^2-m-1=0.$

அதாவது $(m+1)^2(m-1)=0$

தீர்வுகள் $-1, -1, 1$

$\therefore$ துணைத் தீர்வு, $z=\varphi(y-x)+x\,\phi\,(y-x)+F(y+x)$

சிறப்புத் தீர்வு, இங்கு வேறு ஒரு முறையில் காண்போம்.

சிறப்புத் தீர்வு $z=Ae^x \cos 2y+Be^x \sin 2y$ என ஏற்று, A, B காண முயல்வோம்.

இந்த z (சிறப்புத் தீர்வு) மதிப்புக்கு

$(D_x^3+D_x^2D_y-D_xD_y^2-D_y^3)\ z$

$= Ae^x \cos 2y+Be^x \sin 2y$

$+ \frac{\delta}{\delta y}(Ae^x \cos 2y+Be^x \sin 2y)$

$- \frac{\delta}{\delta x}(-4Ae^x \cos 2y-4Be^x \sin 2y)$

$-(8Ae^x \sin 2y-8Be^x \cos 2y)$

$$= Ae^x \cos 2y + Be^x \sin 2y$$
$$+ 2\,Be^x \cos 2y - 2\,Ae^x \sin 2y$$
$$+ 4\,Ae^x \cos 2y + 4\,Be^x \sin 2y$$
$$+ 8\,Be^x \cos 2y - 8\,Ae^x \sin 2y$$

$$= e^x \cos 2y\,(5A+10B)$$
$$+ e^x \sin 2y\,(5B-10A)$$

எனவே கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டின் வலப் பக்கத்தோடு ஒப்பிட்டுப் பார்த்தால்,

$$5A+10B=1$$
$$5B-10A=0$$

எனவே $25A=1$

$$A = \frac{1}{25}$$

$$B = \frac{2}{25}$$

எனவே சிறப்புத் தீர்வு $z = \frac{1}{25} e^x \cos 2y + \frac{2}{25} e^x \sin 2y.$ துணைத் தீர்வுடன் இதைக் கூட்ட, முழுத் தீர்வு பெறப்படும்.

பயிற்சி 15·3

பின்வரும் சமன்பாடுகளின் தீர்வு காண்க.

(1) $(D_x^2 - 7\,D_xD_y + 12\,D_y^2)\,z = e^{3x+2y}$

(2) $(D_x^2 - 3D_xD_y + 2D_y^2)z = 4\,e^{x+y}$

(3) $(D_x^2 - 6\,D_x\,D_y + 9\,D_y^2)\,z = 2\,e^{3x+y}$

(4) $(D_x^3 - 3D_x^2D_y - 4\,D_x\,D_y^2 + 12\,D_y^3)\,z = 4 \sin(2x+y)$

(5) $(D_x^3 - 7\,D_xD_y^2 - 6D_y^3)\,z = 4 \cos(x-y)$

(6) $(D_x^3 - 3D_xD_y^2 + 2D_y^3)\,z = \sqrt{x+2y}$

(7) $(D_x^3 + D_x^2D_y - 6\,D_xD_y^2)\,z = x^2+y^2$

(8) $(D_x^3-2D_x^2D_y)z = 2e^{2x}+3x^2y$

(9) $(D_x^2-D_y^2)\,z = x+y$

(10) $(D_x^2-6\,D_xD_y+9\,D_y^2)\,z = \sinh\,(2x+y)$

(11) $(D_x^3-3\,D_xD_y^2-2\,D_y^3)\,z = e^y\,(2x+3)$

(12) $(D_x^2-2\,D_xD_y)\,z = 60\,x^3y$

விடை 15·3

(1) $z = \varphi\,(y+4x)+\phi\,(y+3x)+\dfrac{e^{3x+2y}}{15}$

(2) $z = \varphi\,(y+2x)+\phi\,(y+x) - 4xe^{x+y}$

(3) $z = \varphi\,(y+3x)+x\,\phi\,(y+3x)+x^2\,e^{3x+y}$

(4) $z = \varphi\,(y-2x)+\phi\,(y+2x)+F\,(y+3x)+x\,\sin\,(2x+y)$

(5) $z = \varphi\,(y-x)+\phi\,(y-2x)+F\,(y+3x)+x\cos\,(x-y)$

(6) $z = \varphi\,(y+x)+x\,\phi\,(y+x)+F\,(y-2x)+$

$$\frac{8}{525}\,(x+2y)^{7/2}$$

(7) $z = \varphi\,(y)+\phi\,(y+2x)+F\,(y-3x)$

$$+\ \frac{2}{15}x^5-\frac{1}{12}\,x^4y+\frac{1}{6}\,x^3y^2$$

(8) $z = \varphi\,(y)+x\phi\,(y)+F\,(y+2x) + \dfrac{1}{4}\,e^{2x}$

$$+\ \frac{1}{20}x^5y + \frac{1}{60}\,x^6$$

(9) $z = \varphi\,(x+y)+\phi\,(y-x) + \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^2y}{2}$

(10) $z = \varphi\,(y+3x)+x\,\phi\,(y+3x)+\sinh\,(2x+y)$

(11) $z = \varphi\,(y-x)+x\,\phi\,(y-x)+F\,(y+2x)-xe^y$

(12) $z = \varphi\,(y)+\phi\,(y+2x)+x^6+3x^5y$

16. ஒரு படிக்குரிய, ஆனல் சமபடித் தன்மையற்ற, பகுதி வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகள் – மாறிலிக் கெழுக்கள் பெற்றவை–கோஷி அமைப்பு

(Non—homogeneous linear partial differential equations with constant coefficients—Cauchy form)

16-1. வரையறை

(i) $f(D_x, D_y)\,z = (a_1 D_x + b_1 D_y + c_1)\ (a_2 D_x + b_2 D_y + c_2)$ ....$(a_n D_x + b_n D_y + c_n)\,z = 0$ ...(A)

என்பது சமபடித் தன்மையற்ற, ஒரு படிக்குரிய, காரணிகளாய்ப் பிரிக்கக் கூடிய, பகுதி வகைக்கெழுச் சமன்பாடாகும்.

a_r, b_r, c_r $(r = 1, 2, 3, ...n)$ யாவும் மாறிலிகள்.

(Reducible non—homogeneous linear equations)

(ii) $f(D_x, D_y)\,z = (D_x D_y + 3D_y^3)\,z$

$= D_x (D_y + 3D^2)\,z$

என்ற சமன்பாடு காரணிகளாய்ப் பிரிக்க முடியாத சமன்பாடு; ஆனல் இவை சமபடித் தன்மையற்றவை; ஒரு படிக்குரியவை. **(Non—reducible, non—homogeneous, linear equations)**

16-2. (A) என்று குறிக்கப்பட்ட சமன்பாட்டின் ஒரு தீர்வு,

$(a_i D_x + b_i D_y + c_i)\ z = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வாயிருக்குமென்பது கண்கூடு.

அடுத்த பத்தி 16-2·1-ல் $(a D_x+b D_y+c)z=0$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வு காண் முறை கூறப்பட்டிருக்கிறது. ஒரு தன்னிச்சையான சார்பு தீர்வில் தோன்றுவது காண்க.

16-2·1 $(aD_x+bD_y+c)z = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வு என்னவெனப் பார்ப்போம். $(a\neq 0, b\neq 0)$

இதை $a \frac{\delta z}{\delta x} + b \frac{\delta z}{\delta y} = -cz$ என எழுதலாம். இதன் தீர்வு காண, இலகிராஞ்ஜின் துணைச் சமன்பாடுகளைக் கொள்வோம்.

அவை $\frac{dx}{a} = \frac{dy}{b} = \frac{dz}{-cz}$

$bx = ay+A$ ஒரு தீர்வு.

$f(A) - \frac{c}{a} x=\log z$ மற்றொரு தீர்வு;

அல்லது $\varphi(A) - \frac{c}{b} y=\log z$ மற்றொரு தீர்வு.

$$\therefore \quad z=e^{f(A)-\frac{c}{a}x} = F_1(A)\, e^{-\frac{c}{a}x}$$

அல்லது $z = e^{\varphi(a)-\frac{c}{b}y} = F_2(A)\, e^{-\frac{c}{b}y}$

அல்லது $z = e^{-\frac{c}{a}x} F_1(bx-ay)$ $[a\neq 0]$

அல்லது $z = e^{-\frac{c}{b}y} F_2(bx-ay)$ $[b\neq 0]$

16-2·2 எனவே a, b, c முதலியவை எதுவும் பூச்சியமாக இல்லாதிருப்பின்

(A) என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வு

$$z = \sum_{i=1}^{n} e^{\frac{-c_i x_i}{a_i}} \varphi_i(b_i x-a_i x)$$

அல்லது $=\sum_{i=1}^{n} e^{\frac{-c_i x}{a_i}} \phi_i(b_i x-a_i y)$

16-2·21 (i) $a D_x z=0$ ஆனால்

$z=\varphi(y)$ என்பது தீர்வாகும்.

(ii) $b D_y z = 0$ ஆனால்

$z=\phi(x)$ என்பது தீர்வாகும்.

(iii) $(b D_y+c) z=0$ ஆனால்

$$\frac{dy}{b}=\frac{dz}{-cz}$$

எனவே $z=f(x)\, e^{-\frac{cy}{b}}$ என்பது தீர்வாகும்.

(iv) $(a D_x+c) z=0$ ஆனால்

$$\frac{dx}{a}=\frac{dz}{-cz}$$

எனவே $z=\phi(y)\, e^{\frac{-c}{a}x}$ என்பது தீர்வாகும்.

(v) $(a D_x+b D_y) z=0$ ஆனால்

$$\frac{dx}{a}=\frac{dy}{b}=\frac{dz}{0}$$

$\therefore$ $z =$ மாறிலி

ஆனால் $bx-ay =$ மாறிலியாதலால்,

$z = f(bx-ay)$ என்ற தீர்வு பெறப்படும். இது $ap+bq=0$ என்ற சமன்பாடாதலின், பகுதி 13-ல் அமைப்பு I-ன்படி,

$z = Ax+By+C$; இங்கு $Aa+Bb=0$

எனவே $z = Ax - \frac{Aa}{b}y+C$

அதாவது $z = A\left(\frac{bx-ay}{b}+\frac{C}{A}\right)$

பொதுத் தீர்வு $z = f(bx-ay)$ என எழுதலாம்.

[$u(x, y) = a$ என்பது ஒரு தீர்வாயின் $f(u) = 0$ என்பது ஒரு தீர்வு என பகுதி 13-ல் நிறுவப்பட்டது காண்க.]

16-2·22 (A) என்ற சமன்பாட்டில்,

$(a_1D_x+b_1D_y+c)$ என்ற செயலி (காரணியாக) k-முறை மடங்கி வருமாயின், அதாவது

$$f(D_x, D_y)\, z \equiv (a_1 D_x+b_1 D_y+c)^k$$

$$(a_{k+1} D_x+b_{k+1} D_y+c_{k+1}) \times \quad \dots \quad \dots \quad \dots$$

... $x(a_n D_x+b_n D_y+c_n)\, z$ என்ற அமைப்பிலிருக்குமாயின், இங்கு $f(D_x, D_y)\, z=0$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வு,

$$z = e^{\frac{-c_1 x}{a_1}} \left[\varphi_1 (b_1x-a_1y)+x\, \varphi_2 (b_1x-a_1y)+ \dots\dots \right.$$

$$\left. \dots\dots +x^{k-1} \varphi_k (b_1x-a_1 y)\right]$$ + மற்றபடி முறைப்படி உள்ள பகுதிகளின் கூட்டுத்தொகை எனப் பெறப்படும்.

16-2·23 : $F(D_x, D_y)\, z=f(x, y)$ எனக் கொடுக்கப்பட்டிருப் பின், நாமறிந்த மரபுப்படி,

$$z = \frac{1}{F(D_x,\ D_y)} f(x, y)$$

என்பது சிறப்புத் தீர்வு எனப்படும். மேலும் $F(D_x, D_y)z = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வு, துணைத் தீர்வு எனப்படும்.

z = துணைத் தீர்வு + சிறப்புத் தீர்வு

= பொதுத் தீர்வு என்ற மரபும் உண்டு என நாமறிவோம்.

16-3. எடுத்துக் காட்டுகள் கொண்டு முன் கூறப்பட்ட முறை களை விளக்குவோம்.

எடுத்துக்காட்டு 1 :

$$(D_x+D_y+1)(D_x+D_y+2)\, z=0$$

என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வு காண்க.

பொதுத் தீர்வு $z=e^{-y} \varphi (x-y)+e^{-2y} \phi (x-y)$ ...(1)

அல்லது $z=e^{-x}\varphi (x-y)+e^{-2x} \phi (x-y)$ ...(2)

அல்லது $z=e^{-x}\varphi (x-y)+e^{-2y}\phi (x-y)$ ...(3)

அல்லது $z=e^{-y}\varphi (x-y)+e^{-2x}\phi (x-y)$ ...(4)

இந்த நான்கில் எது ஒன்றையும் தீர்வாகக் கொள்ளலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 2 :

$(D_x+D_y+1)^2\ z=0$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வு காண்க.

பொதுத் தீர்வு $z=e^{-y}\,[\varphi\,(x-y)+x\,\phi\,(x-y)]$

எடுத்துக்காட்டு 3:

$(2D_x+3D_y+5)\,(D_x-2)\,(D_y+2)\,z=0$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வு காண்க.

பொதுத் தீர்வு $z=e^{-\frac{5}{2}x}\ \varphi_1{}'(3x-2y)+e^{2x}\varphi_2\,(y)$

$+e^{-2y}\,\varphi_3\,(x)$

எடுத்துக்காட்டு 4 :

$D_xD_y\,(D_x-2)\,(D_y-3)\,(D_x+D_y)\,z=0$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வு காண்க.

$D_x\,z=0$ — தீர்வு→ $\varphi_1\,(y)=z$

$D_y\,z=0$ — தீர்வு→ $\varphi_2\,(x)=z$

$(D_x-2)\,z=0$ — தீர்வு→ $e^{2x}\,\varphi_3\,(y)=z$

$(D_y-3)\,z=0$ —தீர்வு→ $e^{3y}\,\varphi_4\,(x)=z$

$(D_x-Dy)\,z=0$ —தீர்வு→ $\varphi_5\,(y-x)=z$

∴ பொதுத் தீர்வு

$z=\varphi_1\,(y)+\varphi_2\,(x)+e^{2x}\,\varphi_3\,(y)+e^{3y}\,\varphi_4\,(x)+\varphi_5\,(y-x)$

என்பதாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 5 :

$(D_x-2D_y)\,(D_x+D_y+2)\,z=3y.e^x+4x.e^{-y}$

என்ற சமன்பாட்டின் முழுத் தீர்வு காண்க.

துணைத் தீர்வு $=\varphi\,(2x+y)+e^{-2x}\,\phi\,(x-y)$

சிறப்புத் தீர்வு $=\dfrac{1}{(D_x-2D_y)\,(D_x+D_y+2)}\,(3y.e^x+4x.e^{-y})$

$u=\dfrac{1}{(D_x+D_y+2)}\,ye^x$ எனக் கொள்க.

எனவே $\dfrac{\delta u}{\delta x}+\dfrac{\delta u}{\delta y}=ye^x-2u$

∴ இலகிராஞ்ஜ் துணைச் சமன்பாடுகள்

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{1} = \frac{dy}{y.e^x - 2u}$$

$y = x + A$ என்பது ஒரு தீர்வு. இதைத் தேவைப்படும்பொழுது பயன்படுத்திக் கொள்வோம்.

$$\frac{dx}{1} = \frac{du}{y.e^x - 2u}$$

எனவே $\frac{du}{dx} = y.e^x - 2u$

$$\therefore \frac{du}{dx} + 2u = y.e^x$$

$$\therefore u.e^{2x} = \int e^{2x}.e^x (x + A)\ dx \qquad [y = x + A]$$

$$= \int \left(x.e^{3x} + A.e^{3x}\right) dx$$

$$= \frac{x}{3} e^{3x} - \frac{e^{3x}}{9} + \frac{Ae^{3x}}{3}$$

$$= \frac{x}{3} e^{3x} - \frac{e^{3x}}{9} + \frac{(y - x)}{3} e^{3x}$$

$$= e^{3x} \left(\frac{y}{3} - \frac{1}{9}\right)$$

$$\therefore u = e^x \left(\frac{y}{3} - \frac{1}{9}\right)$$

இப்பொழுது முதல் பகுதி,

$z = \frac{1}{D_x - 2D_y} e^x \left(\frac{y}{3} - \frac{1}{9}\right) \times 3$ என வரும்.

$$\therefore \frac{\delta z}{\delta x} - 2\frac{\delta z}{\delta y} = e^x \left(\frac{y}{3} - \frac{1}{9}\right) \times 3$$

$$\therefore \frac{dx}{1} = \frac{dy}{-2} = \frac{dz}{\frac{e^x(3y - 1)}{3}}$$

$y + 2x = B$ என முதலில் பெறலாம்

$$\therefore \quad \frac{dx}{1} = \frac{dz}{\frac{e^x(3y-1)}{3}}$$

$$\therefore \quad \frac{dz}{dx} = \frac{e^x(3y-1)}{3}$$

$$= \frac{e^x(3B-6x-1)}{3}$$

$$\therefore \quad z = \frac{1}{3}\int e^x(3B-6x-1)\,dx$$

$$= \frac{1}{3}\left[3\,B e^x - 6x e^x + 6e^x - e^x\right]$$

$$= \frac{1}{3}\left[(3y+6x)\,e^x - 6x e^x + 6e^x - e^x\right]$$

$$= \frac{1}{3}\,e^x(3y+5)$$

$$\therefore \quad \frac{1}{(D_x-2D_y)\ (D_x+D_y+2)}3y e^x = y e^x + \frac{5}{3}\,e^x$$

இப்பொழுது, $\frac{1}{(D_x+D_y+2)}\,x e^{-y} = v$ எனக் கொள்வோம்.

$$\frac{\delta v}{\delta x} + \frac{\delta v}{\delta y} = xe^{-y} - 2v$$

$$\therefore \quad \frac{dx}{1} = \frac{dy}{1} = \frac{dv}{xe^{-y}-2v}$$

$$x = y + A$$

$$\frac{dv}{dy} + 2v = xe^{-y}$$

$$\therefore \quad ve^{2y} = \int e^{2y}\,x e^{-y}\,dy$$

$$= \int e^y(y+A)\,dy$$

$$= ye^y - e^y + Ae^y$$

$$\therefore \quad v = ye^{-y} - e^{-y} + (x-y)\,e^{-y}$$

$$= e^{-y} - (x-1)$$

இப்பொழுது இரண்டாம் பகுதி

$$z = \frac{1}{(D_x - 2D_y)} 4\, e^{-y}\, (x-1) \text{ என வரும்.}$$

$$\therefore \quad \frac{\delta z}{\delta x} - 2\frac{\delta z}{\delta y} = 4\, e^{-y}\ (x-1)$$

$$\therefore \quad \frac{dx}{1} = \frac{dy}{-2} = \frac{dz}{4e^{-y}(x-1)}$$

$$\therefore \quad y+2x = B$$

மேலும் $\frac{dz}{dy} = 4 \times \frac{1}{2}\, e^{-y}\ (1-x)$

$$z = 4\times\frac{1}{2}\int e^{-y}\ \left(1+\frac{y-B}{2}\right) dy$$

$$= \int e^{-y}\ (2+y-B)\ dy$$

$$= \int \left[\ e^{-y}\,(2+y-B)\ \right] dy$$

$$= \left[\ -2e^{-y} - y\, e^{-y} - e^{-y} + Be^{-y}\ \right]$$

$$= \left[\ -3\ e^{-y} - y\, e^{-y} + (y+2x)e^{-y}\ \right]$$

$$= e^{-y}(2x-3)$$

$$\therefore \quad \frac{1}{(D_x - 2D_y)\,(D_x + D_y + 2)}\, 4x\,e^{-y} = e^{-y}\ (2x-3)$$

∴ முழுத் தீர்வு

$$z = \varphi\ (2x+y) + e^{-2x}\phi\ (x-y) + ye^{x} + \frac{5}{3}\, e^{x}$$
$$+ e^{-y}(2x-3)$$

எடுத்துக்காட்டு 6 :

$(D_x + D_y + 1)\ z = e^{x+y}$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வு காண்க.

துணைத் தீர்வு $= e^{-x}\phi\ (x-y)$

சிறப்புத் தீர்வு $z = \frac{e^{x+y}}{(D_x+D_y+1)}$

$\therefore \frac{dz}{dx} + \frac{dz}{dy} = e^{x+y} - z$

$\therefore \frac{dx}{1} = \frac{dy}{1} = \frac{dz}{e^{x+y}-z}$

ஒரு தீர்வு, $y = x+A$

மேலும் $\frac{dz}{dx} = e^{x+y} - z$

$\therefore \frac{dz}{dx} + z = e^{x+y}$

$$\therefore ze^x = \int e^x e^{x+y}\, dx$$

$$= \int e^{3x+A}\, dx \qquad [y = x+A]$$

$$= \frac{e^{3x+A}}{3}$$

$$= \frac{e^{3x+y-x}}{3} \qquad [\because y = x+A]$$

$$= \frac{e^{2x+y}}{3}$$

$\therefore z = \frac{1}{3}e^{x+y}$

முழுத் தீர்வு $z = e^{-x}\phi(x-y) + \frac{1}{3}e^{x+y}$

எடுத்துக்காட்டு 7 :

$(D_x - 2D_y + 1)\, z = e^{x+y}$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வு காண்க.

துணைத் தீர்வு $= e^{-x}(2x+y)$

சிறப்புத் தீர்வு $z = \frac{e^{x+y}}{D_x - 2D_y + 1}$

$\therefore \frac{dz}{dx} - 2\frac{dz}{dy} + z = e^{x+y}$

$\therefore \quad p-2q = e^{x+y}-z$

$\therefore \quad \frac{dx}{1} = \frac{dy}{-2} = \frac{dz}{e^{x+y}-z}$

$\therefore \quad 2x+y = A$

மேலும் $\frac{dz}{dx}+z = e^{x+y}$

$$\therefore \quad z e^{x} = \int e^{x} e^{x+y} dx$$

$$= \int e^{2x+A-2x} dx \quad \left[\because 2x+y=A\right]$$

$$= \int e^{A} dx$$

$$= x\, eA$$

$$= x\, e^{2x+y}$$

$\therefore \quad z = xe^{x+y}$

$\therefore$ முழுத் தீர்வு, $z = e^{-x}\ (2x+y) + xe^{x+y}$

பயிற்சி 16·1

பின்வரும் சமன்பாடுகளின் தீர்வு காண்க.

(1) $(D_x-D_y)\ (D_x+D_y+3)z = 0$

(2) $(2D_xD_y-3D_y+D_y^2)\ z = 0$

(3) $(D_x-D_y+1)\ z = e^{2x+3y}$

(4) $(D_x-2D_y+4)\ z = 16x$

(5) $D_x\ (D_x+D_y+1)\ z = x+y$

(6) $D_y\ (D_x-2)\ z = mx+ny$

விடை 16·1

(1) $z = \varphi\ (y+x)+e^{-3x}\ \phi\ (y-x)$

(2) $z = \varphi\ (x)+e^{3y}\ \phi\ (2y-x)$

(3) $z = e^{-x} \phi(y+x) + xe^{2x+3y}$

(4) $z = {}^{2}e^{y} \phi(2x+y) + 4x-1$

(5) $z = \varphi(y) + e^{-x} \phi(x-y) + \dfrac{x^2}{2} + xy - 2x$

(6) $z = \varphi(x) + e^{2x} \phi(y) - my\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{4}\right) - \dfrac{ny^2}{4}$

16-4 :

முன்னர் $\dfrac{1}{f(D)} V e^{ax} = e^{ax} \dfrac{1}{f(D+a)} V$ என்று வ. ச. I-ல் கண்டது போல, இங்கும்

$$\frac{1}{f(D_x, D_y)} V e^{\alpha x+\beta y} = e^{\alpha x+\beta y} \frac{1}{f(D_x+a, D_y+b)} V$$

என நிறுவலாம். [$V = V(x, y)$ எனக் கொள்க.]

இதைப் பயன்படுத்தி

$$F(D_x, D_y)\, z = V e^{\alpha x+\beta y}$$

என்ற அமைப்பிலுள்ள சில சமன்பாடுகளின் தீர்வுகளைக் காண லாம்.

16·4-1. எடுத்துக்காட்டு 1 :

$(D_x - 1)(D_x + D_y - 3)\, z = e^{x+2y} (x+y)$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வு காண்க.

துணைத் தீர்வு $= e^{x} \varphi(y) + e^{3x} \phi(x-y)$

சிறப்புத் தீர்வு $= \dfrac{e^{x+2y}(x+y)}{(D_x-1)\,(D_x+D_y-3)}$

$$= e^{x+2y} \frac{x+y}{(D_x+1-1)\,(D_x+1+D_y+2-3)}$$

$$= e^{x+2y} \frac{x+y}{D_x(D_x+D_y)}$$

இப்பொழுது $\dfrac{x+y}{D_x(D_x+D_y)}$ காண வேண்டும்.

$u = \frac{x+y}{D_x+D_y}$ எனக் கொள்க.

$$\frac{\delta u}{\delta x} + \frac{\delta u}{\delta y} = x+y$$

$$\therefore \frac{dx}{1} = \frac{dy}{1} = \frac{du}{x+y}$$

$\therefore \quad y=x+A$ ஒரு தீர்வு

$$\frac{du}{dx} = x+y$$

$$= 2x+A$$

$$u = x^2+Ax$$

$$= x^2+x(y-x) \qquad [\because \quad y=x+A]$$

$$= xy$$

இப்பொழுது $z = \frac{xy}{Dx}$

$$\frac{\delta z}{\delta x} = xy$$

$$\therefore z = \frac{x^2y}{2}$$

எனவே, முழுத் தீர்வு

$$z = e^x \varphi(y)+e^{3x} \phi(x-y)+ \tfrac{1}{2}x^2ye^{x+2y}$$

பயிற்சி 16·3

பின்வரும் சமன்பாடுகளின் தீர்வு காண்க.

(1) $(D_x+D_y-1)(D_x+D_y-3)(D_x+D_y)z$
$= 10\,e^{x+y}\cos(2x-y)$

(2) $(D_y-1)(D_x+D_y-2)z = e^{x+y}(x+y)$

(3) $(D_x+D_y)(D_x+D_y-4)z = e^{3x+y}\sin(x+y)$

விடை 16·3

(1) $z = e^{x}\varphi(y-x)+e^{3x}\phi(y-x)+\phi(y-x)$
$-e^{x+y}[\sin(2x-y)+2\cos(2x-y)]$

(2) $z = e^{x}\varphi(x)+e^{2y}\phi(x-y)+e^{x+y}\dfrac{x^2y}{2}$

(3) $z = \varphi(y-x)+e^{4x}\phi(x-y)$
$-\dfrac{1}{20}e^{3x+y}[2\cos(x+y)+\sin(x+y)]$

16–5. காரணிகளாகப் பிரிக்க முடியாத, சமபடித் தன்மையற்ற ஒருபடிக்குரிய பகுதி வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகள்

இவை பற்றிய வரையறை 16-1 (ii)-ல் கொடுக்கப்பட்டிருப்பது காண்க.

$f(D_x, D_y)z=0$ ...(B)

என்ற அவ்விதமான சமன்பாடுகளைத் தீர்க்கும் வகை காண்போம்.

$$D^r_x D^s_y \left(C e^{\alpha x+\beta y}\right) = C\alpha^r\beta^s e^{\alpha x+\beta y}$$

என நமக்குத் தெரியுமாதலால்,

$z=C e^{\alpha x+\beta y}$ என $f(D_x, D_y) = 0$-ல் ஈடு செய்தால்

$Cf(\alpha, \beta)e^{\alpha x+\beta y} = 0$ எனப் பெறப்படும்.

(B) என்ற சமன்பாட்டிற்கு,

$C e^{\alpha x+\beta y}$ என்பது ஒரு தீர்வாகும்; கட்டுப்பாடு $f(\alpha, \beta)=0$ என்பது தேவைப்படும். C என்பது ஒரு மாறிலி. α என ஒரு குறிப்பிட்ட மதிப்புக்கு,

$f(\alpha, \beta)=0$ என்பதற்குப் பொருத்தமாக β-க்கு ஒன்று அல்லது பல மதிப்புகள் பெறலாம். எனவே, $f(\alpha, \beta)=0$ என்பதற்குப் பொருத்தமாக, (α_i, β_i) என எண்ணற்ற இரட்டைகள் காணலாம். எனவே

$$z = \sum_{i=1}^{\alpha} C_i e^{\alpha_i x+\beta_i y}$$

என்பது (B)-ன் தீர்வாகும்; ஆனால் அமைய வேண்டிய கட்டுப் பாடு $f(\alpha_i, \beta_i)=0$ என்பதாம்.

16-5·1 : $f(D_x, D_y)\, z=0$ என்ற இவ்வகைப்பட்ட சமன் பாடு ஒரு n வரிசைச் சமன்பாடு எனக் கொள்வோம். அதாவது $f(D_x, D_y)\, z=(D_x{}^n+\ldots\ldots\ldots\ldots)\, z=0$ என ஏற்பதால் பொதுமை மாறாது.

$$f(D_x, D_y)\, z \equiv (D_x+h_1 D_y+K_1)(D_x+h_2 D_y+K_2)\ldots\ldots$$
$$\ldots(D_x+h_m D_y+K_m)\, g(D_x, D_y)=0$$

என எழுத முடியுமானால், $(m<n)$

முதல் m காரணிக்குரிய தீர்வுகளை நாம் முன்னர் அறிந்தபடி எழுதிவிட்டு, $g(D_x, D_y)=0$ எனக் காரணிகளாகப் பிரிக்க முடி யாத பகுதிக்கு $\sum\limits_{i}^{\infty} C_i\, e^{a_i x+b_i y}$ என்பதைச் சேர்க்கலாம். அதாவது

பொதுத் தீர்வு,

$$z=e^{-k_1 x}\varphi_1(h_1 x-y)+e^{-k_2 x}\varphi_2(h_2 x-y)+\ldots\ldots$$
$$+e^{-K_m x}\varphi_m(h_m x-y)+\sum_{i=1}^{\infty} C_i\, e^{a_i x+b_i y}$$

$g(a_i, b_i)=0$ என்பது கட்டுப்பாடு.

16-5·2. எடுத்துக்காட்டு **1 :**

$$(D_x{}^2+2D_x+D_y)\, z=0$$

என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வு காண்க.

இது 16-5-ல் கூறப்பட்ட வகையில் இருக்கிறது.

$$f(a, b)=a^2+2a+b=0$$

$$\therefore\quad b=-a(a+2)$$

$$\therefore\quad \text{தீர்வு}\ z=\sum_{i=1}^{\infty} C_i\, e^{a_i x+a_i(a_i+2)y}$$

என்ற அமைப்பில் வரும்.

எடுத்துக்காட்டு 2 :

$$(D_x+D_y)\ (D_x+D_y-2)\ (D_x-D_y^2)\ z = 0$$

என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வு காண்க.

(D_x+D_y)-க்குரிய தீர்வுப் பகுதி $\varphi\ (x-y)$;

(D_x+D_y-2)-க்குரிய தீர்வுப் பகுதி $e^{2x}\ \phi\ (x-y)$

$(D_x-D_y^2)$-க்குரிய தீர்வுப் பகுதி காண $a-b^2=0$ ஆகவிருக்க வேண்டும். அதாவது $a=b^2$;

$$\therefore \text{ தீர்வுப் பகுதி } \sum_{1}^{\infty} C_i\, e^{a_i x + \sqrt{a_i}\, y}$$

$$\text{அல்லது } \sum_{i=1}^{\infty} C_i\, e^{b_i^2 x + b_i y}$$

$$\text{எனவே பொதுத் தீர்வு } z = \varphi\ (x-y) + e^{2x}\ \phi\ (x-y) + \sum_{i=1}^{\infty} C_i\, e^{b_i^2 x + b_i y}$$

எடுத்துக்காட்டு 3 :

$(D_x^2-D_y)\ z = e^{3x+2y}$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வு காண்க.

$$\text{துணைத் தீர்வு} = \sum_{i=1}^{\infty} C_i\, e^{a_i x + a_i^2 y}$$

$$\text{சிறப்புத் தீர்வு} = \frac{e^{3x+2y}}{D_x^2-D_y}$$

$$= \frac{e^{3x+2y}}{9-2} = \tfrac{1}{7}\, e^{3x+2y}$$

$$\therefore \text{ முழுத் தீர்வு } z = \sum_{i=1}^{\infty} C_1\, e^{a_i x + a_i^2 y} + \tfrac{1}{7}\, e^{3x+2y}$$

பயிற்சி 16·4

பின்வரும் பகுதி வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகளின் தீர்வு காண்க.

(1) $(D_x^2 - 3D_x + D_y^2)\, z = 0$

(2) $(D_x - D_y^2)\, z = e^{x+y}$

(3) $(D_x + D_y^2)\, z = e^{x+y}$

(4) $(D_x^2 + D_y)\,(D_x - D_y - D_y^2)\, z = 0$

(5) $(2D_x^2 - D_y^2 + D_x)\, z = x^2 - y$

விடை 16·4

(1) $z = \sum_{i=1}^{\infty} c_1\, e^{a_i x \pm \sqrt{a_i(3-a_i)}\, y}$

(2) $z = \sum_{i=1}^{\infty} c_1\, e^{b_i^2 x + b_i y} + x\, e^{x+y}$

அல்லது $\sum_{i=1}^{\infty} c_1\, e^{b_i^2 x + b_i y} - \frac{1}{2}\, y e^{x+y}$

(3) $z = \sum_{i=1}^{\infty} c_i\, e^{-b_i^2 x + b_i y} + \frac{1}{2}\, e^{x+y}$

(4) $z = \sum_{i=1}^{\infty} c_i\, e^{a_i x - a_i^2 y}$

$+ \sum_{i=1}^{\infty} K_1\, e^{l_i y + (l_i + l_i^2) x}$

(5) $z = \sum_{i=1}^{\infty} c_i\, e^{a_i x \pm \sqrt{2a_i^2 + a_i}\, y} - \frac{1}{2}\, x^2 y^2 + \frac{1}{6}\, y^s$

$- \frac{1}{12}\, x y^4 - \frac{1}{6}\, y^4 - \frac{1}{360}\, y^6.$

16-6 கோஷி அமைப்புச் சமன்பாடுகள் (Cauchy form)

$$f(D)\,y \equiv x^n \frac{d^n y}{dx^n} + P_1\, x^{n-1} \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \ldots\ldots + P_n y = X$$

என்ற அமைப்பிலுள்ள சமன்பாட்டினை முன்னர் வ. ச. I-ல் பார்த்தோம். இது கோஷி அமைப்பு எனப்படும். அதே அமைப்பில்

$$f(x\,D_x, y\,D_y) \equiv (x^n D_x^n + P_1 x^{n-1}\, y\, D_x^{n-1}\, Dy\ldots\ldots\ldots)\, z$$

$$= F(x, y) \quad \ldots(C)$$

என்ற சமன்பாடு இருப்பது காண்க.

$$\text{இதை } \sum_{r,\, s} P_{rs}\, x^r\, y^s\, D^r{}_x\, D^s{}_y\, z = F(x, y)$$

எனவும் எழுதலாம்.

இங்கு $x = e^u$, $y = e^v$ என ஈடு செய்து, இதை ஓர் 'ஒருபடிக்குரிய' (Linear) பகுதி வகைச் சமன்பாடாக, மாறிலிக் கெழுக்கள் கொண்டதாய் மாற்றலாம்,

ஈடு செய்முறை :

$x = e^u$; $y = e^v$

$$\therefore \quad D_x z = \frac{\delta z}{\delta x}$$

$$= \frac{\delta z}{\delta u} \frac{du}{dx} = \frac{1}{x} \frac{\delta z}{\delta u}$$

$$= \frac{1}{x} D_u z$$

$$\therefore \quad x\, D_x z = D_u z$$

அவ்வாறே $y\, D_y z = D_v z$

$$\frac{\delta^2 z}{\delta x^2} = \frac{\delta}{\delta x}\left(\frac{1}{x} \frac{\delta z}{\delta u}\right)$$

$$= -\frac{1}{x^2} \frac{\delta z}{\delta u} + \frac{1}{x} \frac{\delta}{\delta u}\left(\frac{\delta z}{\delta u}\right) \frac{du}{dx}$$

$$= \frac{1}{x^2}\left[\frac{\delta^2 z}{\delta u^2} - \frac{\delta z}{\delta u}\right]$$

$$\therefore \quad x^2 \frac{\delta^2 z}{\delta x^2} = \frac{\delta^2 z}{\delta u^2} - \frac{\delta z}{\delta u}$$

$$= D_u (D_u - 1)\, z$$

அவ்வாறே $y^2 \dfrac{\delta^2 z}{\delta y^2} = D_v (D_v - 1)\, z$

தொடர்ந்து செய்தால்,

$$x^3 \frac{\delta^3 z}{\delta x^3} = D_u (D_u - 1)(D_u - 2)\, z$$

$$x^m \frac{\delta^m z}{\delta x^m} = D_u (D_u - 1) \ldots\ldots (D_u - m + 1)\, z$$

... ...

என வரும்.

இவற்றை (C)-ல் இடப் புறத்தில் ஈடு செய்தால், மாறிலிக் கெழுக்கள் உடைய சமன்பாடு வரும்.

16·6·1 எடுத்துக்காட்டு :

$(x^2 D_x^2 + 2xy D_x D_y - x D_x) z = x^3 / y^2$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வு காண்க.

$x = e^u$, $y = e^v$ என ஈடு செய்தால்,

$\left[D_u (D_u - 1) + 2 D_u \; D_v - D_u \right] z = e^{3u} . \; e^{-2v}$ என வரும்.

அதாவது

$(D_u^2 + 2\, D_u D_v - 2 D_u)\; z = e^{3u-2v}$ என வரும்.

$\therefore \quad D_u (D_u + 2 D_v - 2)\; z = e^{3u-2v}$

இதன் துணைத் தீர்வு $= \varphi (v) + e^{2u} \phi (2u - v)$

இதன் சிறப்புத் தீர்வு $= \dfrac{e^{3u-2v}}{D_u^2 + 2 D_u D_v - 2 D_u}$

$$= \frac{e^{3u-2v}}{9 + 2(-6) - 6}$$

$$= \frac{e^{3u-2v}}{-9}$$

$\therefore$ முழுத்தீர்வு $z = \varphi(\log y) + x^2 \phi(2\log x - \log y) - \frac{1}{9}\frac{x^3}{y^2}$

$$= \varphi(\log y) + x^2 \phi \log\left(\frac{x^2}{y}\right) - \frac{1}{9}\frac{x^3}{y^2}$$

$$= \varphi_1(y) + x^2 \phi_1\left(\frac{x^2}{y}\right) - \frac{1}{9}\frac{x^3}{y^2}$$

பயிற்சி 16.5

பின்வரும் சமன்பாடுகளின் தீர்வு காண்க,

(1) $(x^2D_x^2 + xy\, D_xD_y - 2y^2D_y^2 - x\, D_x - 6\, y\, D_y)\, z = 0$

(2) $(x^2y\, D_x^2\, D_y - xy^2\, D_x\, D_y^2 - x^2D_x^2 + y^2D_y^2)\, z = \frac{x^3+y^3}{xy}$

(3) $x^2D_x^2 + 2\, xy\, D_xD_y + y^2D_y^2 = x^m y^n$

(4) $x^2D_x^2 - y^2D_y^2 = xy$

(5) $x^2D_x^2 - y^2D_y^2 = y\, D_y - xD_x$

விடை 16·5

(1) $z = \varphi\left(\frac{y}{x^2}\right) + x^2 \phi(xy)$

(2) $z = x\varphi(y) + y\phi(x) + \phi(xy) - \frac{1}{6}\left(\frac{x^3-y^3}{xy}\right)$

(3) $z = x\, F\left(\frac{y}{x}\right) + f\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{x^m y^n}{(m+n)(m+n-1)}$

(4) $z = \varphi \log(xy) + x\phi \log\left(\frac{x}{y}\right) + xy \log x$

$$= \varphi(xy) + x\phi\left(\frac{x}{y}\right) + xy \log x$$

(5) $z = \varphi(xy) + \phi\left(\frac{x}{y}\right)$

17. இலாப்ளாஸ் மாற்றமைப்பும், மாங்கே முறையும்

(Laplace transformation and Monge's method)

17-0. சென்ற மூன்று பகுதிகளில் (14, 15, 16) இரண்டாம் வரிசை பகுதி வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகளின் தீர்வு காணும் சில முறைகளைப் பார்த்தோம். இப்பகுதியில் மேலும் இரண்டு முக்கிய மான முறைகளை விரிவாகக் காண்போம்.

அவையாவன : (A) இலாப்ளாஸ் மாற்றமைப்பு (Laplace transformation)

(B) மாங்கே முறை (Monge's method)

A

17-1. இலாப்ளாஸ் மாற்றமைப்பு (Laplace transformation)

$$Rr+Ss+Tt+Pp+Qq+Zz = F(x,y) \qquad ...(A)$$

என்ற அமைப்பில் இருப்பதை, x,y என்ற இருசார்பில் மாறிகளுக்குப் பதிலாக, u,v என்ற மற்றிரு சார்பில் மாறிகளையொட்டி மாற்றியமைப்பது இலாப்ளாஸ் மாற்றமைப்பு எனப்படும்.

அதாவது $u = u(x,y)$, $v = v(x,y)$ ...(1)

என்ற புது சார்பில் மாறிகளையொட்டி (A) ஐ மாற்றியமைக்கிறோம்.

17-1·1. இந்த மாற்றமைப்பு பெற, பின்வரும் தொடர்புகளை நாம் முதலில் பெறுவோம். இங்கு

$$\phi_x = \frac{d\phi}{dx}$$

$$\phi_y = \frac{\delta \phi}{\delta y}$$

$$\phi_{xx} = \frac{\delta^2 y}{\delta x^2}$$

$$\phi_{xy} = \frac{\delta^2 \phi}{\delta x \, \delta y}$$

$$\phi_{yy} = \frac{\delta^2 \phi}{\delta y^2}$$

என்ற விதமான குறியீடுகள் பயன்படுத்தப்பட்டிருக்கின்றன.

$$p = \frac{\delta z}{\delta x} = \frac{\delta z}{\delta u} \frac{\delta u}{\delta x} + \frac{\delta z}{\delta v} \frac{\delta v}{\delta x}$$

$$= z_u \, u_x + z_v \, v_x$$

$$q = \frac{\delta z}{\delta y} = \frac{\delta z}{\delta u} \frac{\delta u}{\delta y} + \frac{\delta z}{\delta v} \frac{\delta v}{\delta y}$$

$$= z_u \, u_y + z_v \, v_y$$

$$r = \frac{\delta p}{\delta x} = \frac{\delta}{\delta x}\left[z_u \, u_x + z_v \, v_x\right]$$

$$= u_{xx} \, z_u + u_x \left(\frac{\delta z_u}{\delta u} \frac{\delta u}{\delta x} + \frac{\delta z_u}{\delta v} \frac{\delta v}{\delta x}\right)$$

$$+ v_{xx} \, z_v + v_x \left(\frac{\delta z_v}{\delta u} \frac{\delta u}{\delta x} + \frac{\delta z_v}{\delta v} \frac{\delta v}{\delta x}\right)$$

$$= u_{xx} \, z_u + z_{uu} \, (u_x)^2 + z_{uv} \, u_x \, v_x$$

$$+ v_{xx} \, z_v + z_{uv} \, u_x \, v_x + z_{vv} \, (v_x)^2$$

$$= z_{uu} \, (u_x)^2 + 2 z_{uv} \, u_x \, v_x + z_{vv} \, (v_x)^2$$

$$+ z_u \, u_{xx} + z_v \, v_{xx}$$

இவ்வாறே,

$$s = \frac{\delta p}{\delta y} = z_u \, u_{xy} + (z_{uu} \, u_y + z_{uv} \, v_y) \, u_x$$

$$+ z_v \, v_{xy} + (z_{uv} \, u_y + z_{vv} \, v_y) \, v_x$$

$$= z_{uu}\, u_x\, u_y + z_{uv}\,(u_x\, v_y + u_y v_x)$$
$$+ z_{vv}\, v_x\, v_y + z_u\, u_{xy} + z_v\, v_{xy}$$

$$t = \frac{\delta q}{\delta y} = z_{uu}(u_y)^2 + 2z_{uv}\, u_y\, v_y$$
$$+ z_{vv}\,(v_y)^2 + z_{uv}\, u_{yy} + z_v\, v_{yy}$$

17-1·2. இந்த ஈடுகளை (A)-ல் செய்தால், பெறப்படும் அமைப்பு

$$R'z_{uu} + S'z_{uv} + T'z_{vv} + P'z_u + Q'z_v + Z_z = G(u,v) \quad ...(B)$$

என வரும். இங்கு

$$R' = R\,(u_x)^2 + Su_x\, u_y + T\,(u_y)^2 \quad ...(2)$$

$$T' = R\,(v_x)^2 + S\, v_x\, v_y + T\,(v_y)^2 \quad ...(3)$$

$$S' = 2R\, u_x v_x + S\,(v_x u_y + v_y u_x) + 2Tu_y v_y \quad ...(4)$$

$$P' = (R\, u_{xx} + Su_{xy} + Tu_{yy} + Pu_x + Qu_y) \quad ...(5)$$

$$Q' = (Rv_{xx} + Sv_{xy} + Tv_{yy} + Pv_x + Qv_y) \quad ...(6)$$

$$G\,(u,v) = F\,(x,y) \quad ...(7)$$

$G\,(u,v)$ என்பது $F\,(x,y)$ ஐ (1)-ன் அடிப்படையில் மாற்றியமைக்கப்பட்ட சார்பாகும்; Zz அப்படியேயிருக்கும்.

(2)-ம், (3)-ம்,

RK^2+SK+T என்றவொரு பொது அமைப்பு பெற்றிருப்பது காண்க.

$RK^2+SK+T = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் வெவ்வேறான தீர்வுகள் (முதலில் வெவ்வேறு மெய்த் தீர்வுகள் எனக் கொள்வோம்) m,n எனவிருக்கட்டும்.

அப்பொழுது,

$$R' = R(u_x)^2 + Su_x u_y + T\,(u_y)^2$$
$$= (Ru_x - mu_y)\,(u_x - nu_y) \text{ எனவும்,}$$

$$T' = R\,(v_x)^2 + Sv_x v_y + T\,(v_y)^2$$
$$= R\,(v_x - mv_y)\,(v_x - nv_y) \text{ எனவும் பெறப்படும்,}$$

எனவே, $R'=0$ ஆக வேண்டுமாயின் $u_x=mu_y$ என்ற கட்டுப்பாடு போதுமானது.

$T'=0$ ஆக வேண்டுமாயின் $v_x=nv_y$ என்ற கட்டுப்பாடு போதுமானது.

$$\therefore \quad u_x = m\,u_y \qquad \ldots(8)$$
$$v_x = n\,v_y$$

என்ற இரு சமன்பாடுகளிலிருந்து u,v என்ற சார்புகளைப் பெற முடியும். இப்படிப் பெற்ற u,v என்பவற்றை (A)-ல் ஈடு செய்வதால் நாம் பெறும் சமன்பாடான (B)-ல், $R'=T'=0$ ஆகிவிடுகிறது.

இப்பொழுது S'-ல், u_x-க்கு $m\,u_y$-ம்
v_x-க்கு $n\,v_y$-ம் ஈடு செய்வோம்.

அப்பொழுது,
$$S' = 2R\,mn\,u_yv_y + S\,(nu_yv_y + mu_yv_y) + 2T\,u_yv_y$$
$$= u_y\,v_y\,[2T + S\,(m+n) + 2R\,mn]$$

ஆனால் $RK^2 + SK + T = 0$-ன் தீர்வுகள் m,n ஆனபடியால்,

$$m+n = -\,\frac{S}{R}$$
$$mn = \frac{T}{R}$$

எனவே
$$S' = u_yv_y\left[\,2T+S\left(\frac{-S}{R}\right) + 2R\,\frac{T}{R}\,\right]$$
$$= u_y\,v_y\left(\,4T - \frac{S^2}{R}\right)$$

[$4\,T - \dfrac{S^2}{R} \neq 0$, அதாவது $S^2-4TR \neq 0$, மேலும் $S^2-4TR > 0$. ஏனெனில் $RK^2=SK+T=0$ என்ற சமன்பாட்டின் $m,\ n$ என வெவ்வேறான மெய்த்தீர்வுகள்.]

எனவே (B) என்ற அமைப்பில் உள்ள சமன்பாடு, $R' = T' = 0$ என்பதை யொட்டி

$$u_y\ v_y\ \left(4\ T - \frac{S^2}{R}\right) z_{uv} + P' z_u + Q' z_v + Zz = G\ (u, v) \qquad \ldots(C)$$

என்பதாக வரும்.

இரு பக்கங்களையும் $u_y\ v_y\ \left(4\ T - \frac{S^2}{R}\right)$ ஆல் வகுத்தால்

நமக்குக் கிடைக்கும் சமன்பாடு

$$\frac{\delta^2 z}{\delta u\ \ \delta v} + L \frac{\delta z}{\delta u} + M \frac{\delta z}{\delta v} + Nz = V\ (u, v) \qquad \ldots(D)$$

என்ற அமைப்பில் வரும் ; L, M, N, V புதுச் சார்புகளாகும்.

வேறு எந்த மாற்றமும் செய்யாமல் (D) என்ற சமன்பாட்டை இரண்டு குறிப்பிட்ட நிலைகளில் தீர்க்கலாம்.

1. இச்சமன்பாட்டை,

$$\frac{\delta}{\delta u}\left(\frac{\delta z}{\delta v} + Lz\right) + M\left(\frac{\delta z}{\delta v} + Lz\right) + z\left(N - LM - \frac{\delta L}{\delta u}\right)$$

$$= V \qquad \ldots(E)$$

என எழுதலாம்.

இங்கு $N - LM - \frac{\delta L}{\delta u}$ பூச்சியமாய் விட்டால்,

சமன்பாட்டை $\frac{\delta w_1}{\delta u} + M\ w_1 = V \qquad \ldots(F)$

என எழுதலாம்; இங்கு $w_1 = \frac{\delta z}{\delta v} + Lz$ என ஏற்கிறேம்.

ஏனெனில் $\frac{\delta w_1}{\delta u} = \frac{\delta}{\delta u}\left(\frac{\delta z}{\delta v} + L\ z\right)$

$\therefore$ (F) என்ற சமன்பாட்டைச் சாதாரணமாகத் தீர்க்கலாம்.

w_1-ன் ஒரு பொது மதிப்பைப் பெற்று z ஐக் காணலாம்.

2. அல்லது இச் சமன்பாட்டை

$$\frac{\delta}{\delta v}\left(\frac{\delta z}{\delta u} + M z\right) + L\left(\frac{\delta z}{\delta u} + Mz\right) + z\left(N - LM - \frac{\delta M}{\delta v}\right) = V \qquad \ldots(G)$$

என எழுதலாம்.

இங்கு $N-LM-\frac{\delta M}{\delta v}$ பூச்சியமாய்விட்டால்

சமன்பாட்டை, $\frac{\delta w_2}{\delta u} + Lw_2 = V \qquad \ldots(H)$

என எழுதலாம்.

இங்கு $w_2 = \frac{\delta z}{\delta u} + Mz$ என ஏற்கப்படுகிறது.

$\therefore$ (H) என்ற சமன்பாட்டைச் சாதாரணமாகத் தீர்க்கலாம் ; w_2-ன் ஒரு பொது மதிப்பைப் பெற்று, z ஐக் காணலாம் ; இந்த இரு முறைகளும் பயன்படாத பொழுதும் (E) என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வு காண முடியும்.

(Forsyth : A Treatise on Differential Equations, § 256 காண்க.)

17-1·3 இப்பொழுது $RK^2+SK+T=0$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வுகள் சமமாக வரின்,

$S^2-4\,RT=0$ என்ற கட்டுப்பாடு நிலவும். அப்பொழுது R' பூச்சியமாகுமானல்,

$u_x=m\,u_y$ என்ற ஒரே ஒரு தொடர்புதான் கிடைக்கும்.

இந்த நிலையில் u, y இரண்டும் இரு புது தொடர்பற்ற மாறிகள் (new independent variables) எனக் கொள்வோம்.

அதாவது $v=y$ எனக் கொள்வோம்.

இப்பொழுது, (B)-ல் $R'=0$ என ஏற்றுக் கொண்டோம். அதை யொட்டி $u_x=mu_y$ எனப் பெற்ருேம்.

மேலும் $v=y$ ஆகையால் $v_x=0$, $v_y=1$; இதைப் பயன்படுத்தினுல் (B)-ல்

$$T'=T$$

$$S'=Su_x+2Tu_y\ ;\ Q'=Q$$

மேலும் $R\,K^2+SK+T=0$ என்ற சமன்பாட்டிற்கு இரு சமத் தீர்வுகளாதலால்,

$$m=-\frac{S}{2R}=-\frac{2T}{S}\left[\because\ m^2=\frac{T}{R};\ m=\frac{T}{R}\times\frac{-2R}{S}\right]$$

$$\therefore\ S'=Su_x+2Tu_y$$

$$=Sm\,u_y+2T\,u_y \qquad [\because\ u_x=mu_y]$$

$$=u_y\left(2T-\frac{S^2}{2R}\right)\quad\left(\because\ m=-\frac{S}{2R}\right)$$

$$=0 \qquad (\because\ S^2-4RT=0)$$

எனவே மாற்றியமைக்கப்பட்டச் சமன்பாடு,

[அதாவது (B)-என்பது]

$$Tz_{yy}+P'\,z_u+Q'\,z_y+Z_z=G\,(u,\,y) \qquad ...(J)$$

எனவாகும் ; இங்கு $Q'=Q$ எனச் சற்று முன்பு பெறப்பட்டது.

Tஆல் இரு பக்கங்களையும் வகுத்தால்,

$$\frac{\delta^2 z}{\delta y^2}+L\,\frac{\delta z}{\delta u}+M\,\frac{\delta z}{\delta y}+Nz=V$$ என வரும்.

$L=0$ ஆனுல் தான் இந்தச் சமன்பாட்டின் தீர்வு காணலாம் ; அப்பொழுது இது y-ல் உள்ள ஒரு சாதாரண வகைக்கெழுச் சமன்பாடு ; தொகை காணும்பொழுது தோன்றும் 'ஏதாமொரு' மாறிலியை ஒரு x-ன் சார்பாகக் கொள்ளலாம்.

17-1·41 எடுத்துக்காட்டு 1 1

$6r-s-t=18y-4x$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வு காண்க.

$R=6 \qquad P=0$

$S=-1 \qquad Q=0$

$T=-1 \qquad F=18y-4x$

$RK^2+SK+T=0$ என்ற சமன்பாடு

$6K^2-K-1=0$ எனவாகும்.

அதாவது $K=\frac{1}{2}$; $K=-\frac{1}{3}$

எனவே மாற்றுச் சார்புகள், u, v என்பவற்றினை,

$$u_x=\frac{1}{2}\, u_y$$

$$v_x=-\frac{1}{3}\, v_y$$

என்ற சமன்பாடுகளினின்று காண வேண்டும்.

$$2\,\frac{\delta u}{\delta x}-\frac{\delta u}{\delta y}=0$$

$$\therefore\ \frac{dx}{2}=\frac{dy}{-1}$$

$$\therefore\ 2y+x=u$$

$\therefore\ u=\varphi\,(x+2y)$ என்பது பொதுத் தீர்வு.

$$3\,\frac{\delta v}{\delta x}+\frac{\delta v}{\delta y}=$$

$$\therefore\ \frac{dx}{3}=\frac{dy}{1}$$

$$\therefore\ x+A=3y \quad \therefore\ v=x-3y$$

$\therefore\ v=\phi\,(x-3y)$ என்பது பொதுத் தீர்வு.

$$u_x=1 \qquad v_x=1$$

$$u_{xx}=0 \qquad v_{xx}=0$$

$$u_{xy}=0 \qquad v_{xy}=0$$

$$u_y=2 \qquad v_y=-3$$

$$u_{yy}=0 \qquad v_{yy}=0$$

எனவே 17-1·2-ல் (C) என்ற சமன்பாடு,

$$-6\,(-4-\tfrac{1}{6})\,z_{uv}+z_u\,(0)+z_v\,(0)=18y-4x.$$

$18y-4x\equiv Au+Bv$ என இருக்கட்டும்.

$$\equiv A\,(x+2y)+B\,(x-3y)$$

$$A+B=-4$$

$$2A-3B=18$$

$$\therefore\ A=\frac{6}{5}\ ;\ B=-\frac{26}{5}$$

$$\therefore \quad 25\ \frac{\delta^2 z}{\delta u\ \delta v} = \frac{6}{5}u - \frac{26}{5}v$$

$\frac{\delta^2 z}{\delta u\ \delta v} = 0$ - ன் தீர்வு $= \varphi(u) + \phi(v)$

∴ துணைத் தீர்வு $= \varphi(u) + \phi(v)$

மேலும் $\frac{\delta^2 z}{\delta u\ \delta v} = \frac{1}{125}(6u - 26v)$

$$\therefore \quad z = \frac{1}{125}\ \frac{(6u-26v)}{D_u\ D_v}$$

$$= \frac{1}{125}\ uv\ (3u - 13v)$$

$$= \frac{1}{125}(x+2y)(x-3y)(45y-10x)$$

$$= \frac{1}{25}(x+2y)(x-3y)(9y-2x)$$

∴ முழுத் தீர்வு,

$$z = \varphi(x+2y) + \phi(x-3y) + \frac{1}{25}(x+2y)(x-3y)(9y-2x)$$

எடுத்துக்காட்டு 2 :

$y^2(r-2s+t) - y(p-q) - z = y^2$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வு காண்க.

$y^2 r - 2s\,y^2 + ty^2 - yp + yq - z = y^2$ என்ற சமன்பாட்டில்

$R = y^2$ $\quad P = -y$

$S = -2y^2$ $\quad Q = y$

$T = y^2$ $\quad Z = -1$

$F(x, y) = y^2$

எனவே $RK^2 + SK + T = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வு காண்போம்.

$$y^2 K^2 - 2y^2 K + y^2 = 0$$

$$\therefore \quad K^2 - 2K + 1 = 0$$

∴ $K = 1, 1$ என்ற இரு சம தீர்வுகள் பெறுகிறோம்.

எனவே 17-1·3-ல் விளக்கப்பட்ட படி

$u_x = u_y$ என வரும்.

$$\frac{\delta u}{\delta x} - \frac{\delta u}{\delta y} = 0$$

$$\therefore \quad \frac{dx}{1} = \frac{dy}{-1}$$

$$\therefore \quad x+y = u$$

அல்லது $u = \varphi(x+y)$ என வரும்.

$u=u\ (x, y)$; $v=y$ என்ற மாற்றங்கள் செய்து வரும் கடைசிச் சமன்பாடு,

$y^2 z_{yy}+P'z_u+y\ z_y-z=y^2$ என வரும்.

$P' = R\ u_{xx}+S\ u_{xy}+T\ u_{yy}+P\ u_x+Qu_y$

$= R(0)+S(0)+T(0)+y-y$

$= 0$ என வரும்.

$\therefore$ சமன்பாடு $y^2 \dfrac{\delta^2 z}{\delta y^2} + y\dfrac{\delta z}{\delta y} - z = y^2$

அதாவது $y=e^w$ எனக் கொண்டால், [16·6 காண்க.]

$[D\ (D-1)\ +D-1]\ z = e^{2w}$ என வரும்.

$(D^2-1)\ z = e^{2w}$ என வரும்.

$(D_w+1)\ (D_w-1)\ z = e^{2w}$ என வரும்.

$$z = A\ e^{-w} + B\ e^w + \frac{e^{2w}}{D^2-1}$$

$$= A\ e^{-w} + B\ e^w + \frac{e^{2w}}{3}$$

$$= \frac{A}{y} + By + \frac{y^2}{3}$$

$$= \frac{F(u)}{y} + f(u) \quad y + \frac{y^2}{3}$$

$$= \frac{1}{y}\ F(x+y)+y\ f\ (x+y)\ + \frac{y^2}{3}$$

இங்கு $A=F(u)$ எனவும், $B=f(u)$ எனவும் எடுத்துக்கொள்ளப் பட்டது.

பயிற்சி 17·1

இலாப்ளாஸ் மாற்றமைப்பு முறை கொண்டு பின்வரும் சமன்பாடுகளின் தீர்வு காண்க.

(1) $y(x+y)(r-s)-xp-yq-z=0$

(2) $x^2r-y^2t+px-qy=x^2$

(3) $t-s+p-q\left(1+\frac{1}{x}\right)+\frac{z}{x}=0$

(4) $x^2r-2\,xys+y^2t-xp+3\,yq=\frac{8y}{x}$

(5) $x(y-x)\,r-(y^2-x^2)\,s+y(y-x)\,t+(y+x)(p-q)$
$= 2\,(x+y+1)$

குறிப்பு : $x+y=u$ எனவும், $xy=v$ எனவும் ஈடுசெய்து தீர்வு காண்க.

(6) $xyr-(x^2-y^2)\,s-xyt+py-qx=2\,(x^2-y^2)$

விடை 17·1

(1) $z=\frac{\varphi(y)}{x+y}+\frac{\phi(x+y)}{y}$

(2) $z=\varphi\left(\frac{x}{y}\right)+\phi(xy)+\frac{1}{4}x^2$

(3) $z=\frac{1}{x}f(x+y)+e^y g(x)$

(4) $z=\varphi(xy)+x^2\phi(xy)+\frac{y}{x}$

(5) $z=\varphi(x+y)+\phi(xy)+x-y+\log x$

(6) $z=\varphi(x^2+y^2)+\phi\left(\frac{y}{x}\right)-xy$

B

17·2. மாங்கே முறை : (Monge's Method)

இந்த முறையை விளக்குவதற்கு முன்பு, சில பொது வரையறைகளை வகுத்துக் கொள்ள வேண்டிய தேவை ஏற்படுகின்றது.

முழுத் தீர்வு (அல்லது தொகை) - (Complex solution or integral)

$$F\ (x,y,z,p,q,r,s,t) = 0 \ldots \quad \ldots \qquad \ldots (1)$$

என்பது ஓர் இரண்டாம் வரிசைப் பகுதி வகைக்கெழுச் சமன்பாடு. எந்த ஒரு மிகப் பொதுவான x,y,z சார்பின் வழியாகப் பெறப்படும் z-ன் மதிப்பும், அதன் பகுதி வகைக் கெழுக்களும்; (1) என்ற சமன்பாட்டிற்குப் பொருத்தமாக உள்ளனவோ அச்சார்பே முழுத்தீர்வு எனப்படும். இச் சார்பில் தம்மிச்சையான சார்புகளோ, மாறிலிகளோ, அல்லது இரண்டுமோ தோன்றலாம்.

17-2·1. இடைநிலைத் தீர்வு (அல்லது) இடைநிலைத் தொகை (Intermediate solution or integral)

ஏதாவது ஒரு முதல் வரிசைப் பகுதி வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டிலிருந்து (1) என்று கொடுக்கப்பட்ட இரண்டாம் வரிசைச் சமன்பாட்டை நாம் பெற முடியுமானல், அம் முதல் வரிசைச் சமன்பாடானது (1)-க்கு ஓர் இடைநிலைத் தீர்வு எனப்படும்.

ஆனல் எல்லாச் சமன்பாடுகளுக்கும் அவ்வாறான இடைநிலைத் தீர்வு ஒன்று இருக்கிறதென்று உறுதியாகக் கூறுதல் இயலாது. எனினும் ஓர் இடைநிலைத் தீர்வை நாம் எப்படியாவது காண முடிந்து, கண்டு விட்டோமானல், முன்பகுதிகளில் விளக்கப்பட்ட முறைகளில் ஏதாவதொன்றைக் கையாண்டு, முழுத் தீர்வைப் பொதுவான அமைப்பிலோ அல்லது ஒரு சிறப்பான அமைப்பிலோ பெறக் கூடும்.

இந்நிலையில், அப்படியான இடைநிலைத் தீர்வு எந்த விதமான பொது அமைப்பினைப் பெற்றிருக்கும்? மேலும் இரண்டாம் வரிசைச் சமன்பாடு எந்த விதமான அமைப்பிலிருந்தால் அதற்கு ஓர் இடைநிலைத் தீர்வு இருக்கும்? காண முடியும்? இப்படிப்பட்ட கேள்விகள் பிறக்கின்றன. பொது அமைப்பு என்று கூறும் பொழுது, தம்மிச்சையான சார்புகள், மாறிலிகள் என்று பொருள்படும்.

17-2·2. ஓர் இடைநிலைத் தீர்வு, பின் கூறப்பட்டுள்ள இரு உருவங்களில் கிடைக்கலாம் ;

(a) $u(x,y,z,p,q) = f[v(x,y,z,p,q)]$ ... (A)

இவ்வுருவத்தில் ஒரே ஒரு தன்னிச்சையான சார்பு 'f' மட்டும் தான் இருக்கும் ; இது ஒன்று.

(b) தம்மிச்சையான மாறிலிகள் மட்டுமே தோன்றினுல், அப்பொழுது இரண்டே மாறிலிகள் மட்டும் தோன்றும்.

அதாவது $\phi(x, y, z, p, q, a_1, a_2) = 0$; ... (B)
இது இரண்டு.

(A) என்ற அமைப்பில், இடைநிலைத் தீர்வு இருக்குமானுல், அதன் மூலச் சமன்பாடு, $Rr+Ss+Tt+U(rt-s^2)=V$ என்ற அமைப்பில் இருந்தாக வேண்டும் ; இது ஓர் இன்றியமையாத கட்டுப்பாடு என்பதைப் பின்னர் காணவிருக்கிறோம். இங்கு R,S,T,U,V என்பவற்றில் இரண்டாம் வரிசை வகைக்கெழுக்களே தோன்ரு.)

(B) என்ற அமைப்பில் இடைநிலைத் தீர்வு இருக்குமானுல்,

$$\frac{d\varphi}{dx} = 0; \ \frac{d\varphi}{dy} = 0$$

என்ற சமன்பாடுகளையும் கொண்டு a_1, a_2 என்ற இரு மாறிலிகளை நீக்கி, இரண்டாம் வரிசைச் சமன்பாடு பெறலாம். ஆனுல் இப்படிப் பெறப்படும் இரண்டாம் வரிசைச் சமன்பாட்டின் அமைப்பிற்கு, (A)-ல் கூறப்பட்ட கட்டுப்பாடு ஏதும் இராது.

17-3. மாங்கே முறை

இம்முறை, $Rr+Ss+Tt+U(rt-s^2)=V$ என்ற அமைப்பிலுள்ள சமன்பாடுகள் சிலவற்றைத் தீர்க்கப் பயன்படும் ; U பூச்சியமானுலும், பூச்சியமாகாவிட்டாலும் இம்முறையைக் கையாளலாம்.

17-3·1. $Rr+Ss+Tt=V$ என்ற அமைப்பிலுள்ள சமன்பாட்டைத் தீர்க்க மாங்கே வகுத்த முறை

மாங்கே முறையில் முதற்படி என்னவெனின் **17-2·2**-ல் கூறியபடி $u=f(v)$

என ஒன்று அல்லது இரண்டு இடைநிலைத் தீர்வுகளைக் காண்ப தாகும் : f என்பது தன்னிச்சையான சார்புக் குறியீடு. எனவே கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டிற்கு, $u = f(v)$ என்ற ஓர் இடை நிலைத் தீர்வு இருக்கிறதென மறைமுகமாக முதலில் ஏற்றுக் கொள் கிறோம்: முதலில் இவ்வாறு ஏற்பது பொருத்தமெனக் கொண் டால், பொதுவாக எந்தவிதமான சமன்பாட்டிற்கும் இதை ஏற்க லாமா; அப்படி ஏற்க இயலாது போயின், பொதுச் சமன்பாடு $F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0$ என்பது எந்தக் கட்டுப்பாட்டுக்கு அடங்கினுல் இவ்வேற்பு பொருந்தும் என ஆராய்வது நமது கடமையாகிறது.

எனவே, இடைநிலைத் தீர்வில் ஆரம்பித்து எவ்வழியில் நாம் செல்லலாமென்பதை ஆராய்ந்து பார்ப்போம்.

இடைநிலைத் தீர்வினை $u = f(v)$ எனக் கொள்வோம் ; முன் கூறியபடி [17-2·2(a)] u-ம், v-ம், x, y, z, p, q என்பவற்றை மட்டுமே சார்ந்தவை.

$u = f(v)$ என்பது ஓர் இடைநிலைத் தீர்வு எனக் கொள்கிறோ மாதலின்,

$$u = u(x, y, z, p, q)$$

$$v = v(x, y, z, p, q)$$

எனப் பொருள்படும். எனவே முறையே x, y ஒட்டி இவற்றின் பகுதி வகைக்கெழு காண,

$$\frac{\delta u}{\delta x} + \frac{\delta u}{\delta z} \cdot \frac{\delta z}{\delta x} + \frac{\delta u}{\delta p} \cdot \frac{\delta p}{\delta x} + \frac{\delta u}{\delta q} \cdot \frac{\delta q}{\delta x}$$

$$= \frac{\delta f}{\delta v}\left(\frac{\delta v}{\delta x} + \frac{\delta v}{\delta z} \cdot \frac{\delta z}{\delta x} + \frac{\delta v}{\delta p} \cdot \frac{\delta p}{\delta x} + \frac{\delta v}{\delta q} \cdot \frac{\delta q}{\delta x}\right) \quad \ldots(1)$$

$$\frac{\delta u}{\delta y} + \frac{\delta u}{\delta z} \cdot \frac{\delta z}{\delta y} + \frac{\delta u}{\delta p} \cdot \frac{\delta p}{\delta y} + \frac{\delta u}{\delta q} \cdot \frac{\delta q}{\delta y}$$

$$= \frac{\delta f}{\delta v}\left(\frac{\delta v}{\delta y} + \frac{\delta v}{\delta z} \cdot \frac{\delta z}{\delta y} + \frac{\delta v}{\delta p} \cdot \frac{\delta p}{\delta y} + \frac{\delta v}{\delta q} \cdot \frac{\delta q}{\delta y}\right) \quad \ldots(2)$$

இவற்றினை p, q, r, s, t என்ற மரபான குறியீடுகள் கொண்டு எழுதினுல்,

$$\frac{\delta u}{\delta x} + p\frac{\delta u}{\delta z} + r\frac{\delta u}{\delta p} + s\frac{\delta u}{\delta q}$$

$$= \frac{\delta f}{\delta v}\left(\frac{\delta v}{\delta x} + p\,\frac{\delta v}{\delta z} + r\,\frac{\delta v}{\delta p} + s\,\frac{\delta v}{\delta q}\right) \quad ...(3)$$

$$\frac{\delta u}{\delta y} + q\,\frac{\delta u}{\delta x} + s\,\frac{\delta u}{\delta p} + t\,\frac{\delta u}{\delta q}$$

$$= \frac{\delta f}{\delta v}\left(\frac{\delta v}{\delta y} + q\,\frac{\delta v}{\delta z} + s\,\frac{\delta v}{\delta p} + t\,\frac{\delta v}{\delta q}\right) \quad ...(4)$$

என்ற அமைப்பில் வரும்.

(3), (4)-லிருந்து $\frac{\delta f}{\delta v}$ ஐ நீக்கினுல்

'f' என்ற தன்னிச்சையான சார்பு 'f' நீக்கப்பெற்று, சமன்பாடு, $rR_1+sS_1+tT_1+U_1\,(rt-s^2)=V_1$ — ...(5)
என்ற அமைப்பில் வருவதைக் காண்கிறோம்.

$$R_1 = \left(\frac{u,\ v}{p,\ y}\right) + q\left(\frac{u,\ v}{p,\ z}\right)$$

$$S_1 = \left(\frac{u,\ v}{q,\ y}\right) + q\left(\frac{u,v}{q,\ z}\right) + \left(\frac{u,\ v}{x,\ p}\right) + p\left(\frac{u,\ v}{z,\ p}\right)$$

$$T_1 = \left(\frac{u,\ v}{x,\ p}\right) + p\left(\frac{u,\ v}{z,\ q}\right)$$

$$U_1 = \left(\frac{u,\ v}{p,\ q}\right)$$

$$V_1 = q\left(\frac{u,\ v}{z,\ x}\right) + p\left(\frac{u,\ v}{y,\ z}\right) + \left(\frac{u,\ v}{y,\ x}\right)$$

இங்கு $\left(\frac{u,\ v}{x,\ y}\right) = \frac{\delta u}{\delta x}\frac{\delta v}{\delta y} - \frac{\delta u}{\delta y}\frac{\delta v}{\delta x}$

போன்ற பொருள்கள் பெற்றவை,

17-3·11 : $Rr + Ss + Tt = V$ ...(6)

என்ற சமன்பாடும், (5)-ம் ஒரே சமன்பாட்டினைக் குறிக்குமாயின்,

(i) U_1 பூச்சியமாக வேண்டும்.

(ii) $\frac{R_1}{R} = \frac{S_1}{S} = \frac{T_1}{T} = \frac{V_1}{V}$ என்பதும்

உண்மையாக வேண்டும். ஆக மொத்தம் நான்கு சமன்பாடுகள் நமக்குக் கிடைத்திருக்கின்றன.

எனவே $Rr+Ss+Tt=V$

என்ற சமன்பாடு நாம் தீர்க்கவேண்டிய சமன்பாடாயின் u,v என்ற இரு சார்புகளும் மேலே (i), (ii) எனப் பெறப்பட்ட நான்கு சமன்பாடுகளுக்கும் கட்டுப்பட வேண்டும். அதாவது u,v என்ற சார்புகள் அந்நான்கு சமன்பாடுகளுக்கும் பொருந்திய சார்புகளாய் இருக்கவேண்டும்.

ஆனல் u,v என்ற இரண்டு சார்புகளைக் காண இரு சமன்பாடுகள் போதுமானவை. எனவே அந் நான்கில் எவையேனுமிரு சமன்பாடுகள் போதும். எனவே எவையேனுமிரண்டு சமன்பாடுகளைக் கொண்டு u, v என்பவற்றை அறியலாம். (நடைமுறையில் இவ்வாறு அறிவது எளிதானதாக இராமல் போனலும் போகலாம்.) எவையேனுமிரு சமன்பாடுகளிலிருந்து u, v கண்டபின்பு, அவற்றின் மதிப்புகளை எஞ்சிய இரு சமன்பாடுகளில் ஈடு செய்தால், இரண்டு முற்றொருமைகள் வந்தாக வேண்டும்; இந்த நிலையில் அவ்விரு முற்றொருமைகளும் நாம் தீர்வு காண எடுத்துக் கொண்ட சமன்பாட்டில் தோன்றுகின்ற R, S, T, V என்ற சார்புகளைச் சார்ந்து நிற்கும். ஆகையால் (6) என்ற சமன்பாட்டிற்கு ஓர் இடைநிலைத் தீர்வு இருக்கவேண்டுமாயின் x, y, z, p, q என்பவற்றையொட்டிய R, S, T, V என்ற சார்புகளிடையே இரண்டு முற்றொருமைகள், அதாவது இரண்டு கட்டுப்பாடுகள் அல்லது தொடர்புகள் இன்றியமையாதனவாய் இருக்கும்.

17-3·2. முக்கியக் குறிப்பு : இந்த முடிவிலிருந்து மற்றொரு முக்கிய முடிவுக்கு வருகிறோம். அதாவது ஓர் இரண்டாம் வரிசை பகுதி வகைக்கெழுச் சமன்பாடு

$$Rr+Ss+Tt+U\,(rt-s^2)=V \qquad ...(7)$$

என்ற அமைப்பில் இருந்தால் மட்டுமே, $u=f\,(v)$ என்ற ஓர் இடைநிலைத் தீர்வு காண முயற்சி செய்யலாம் ; இல்லையேல் அம்முயற்சி

பயனற்றுப் போகும். மேலும் சிறப்பாக, $U=0$ என்ற கட்டுப் பாட்டில், நாம் பெற்ற முடிவைப்போல, (7) என்ற அமைப்பி லுள்ள சமன்பாட்டிற்கும் நாம் $u = f(v)$ என்ற ஓர் இடைநிலைத் தீர்வு பெற வேண்டுமாயின், R, S, T, U, V என்பவற்றிற்கிடையேயும் இரண்டு முற்றொருமைத் தொடர்புகள் இருந்தாக வேண்டும் என்றும் நிறுவலாம்.

17-3·3 எனவே

$$Rr+Ss+Tt+U(rt-s^2)=V \quad \ldots(7)$$

என்ற பொது அமைப்பிலுள்ள ஒரு சமன்பாட்டிற்கு $u = f(v)$ என்ற ஓர் இடைநிலைத் தீர்வு காண முற்படுவோம்.

$U=0$ என்ற கட்டுப்பாட்டில்

$Rr+Ss+Tt=V$ என்ற சமன்பாடனது, (7) என்ற அமைப்பின் ஒரு சிறப்பான அமைப்பாகப் பெறப்பட்டு விடும். இப்பொழுது, (7) என்ற சமன்பாட்டில், ஓர் இடை நிலைத் தீர்வு இருப்பதற்கு இன்ற யமையாது தேவைப்படும் தொடர்புகள் (இரண்டு முற்றொரு மைத் தொடர்புகள்) R, S, T, U, V என்பவற்றினிடையே நிலவு கின்றன என்று ஏற்றுக் கொண்டு அக்கொள்கையின் அடிப் படையில் இடைநிலைத் தீர்வைக் காண முற்படுவோம்.

$$dp = r\,dx+s\,dy \quad \ldots(8)$$

$$dq = s\,dx+t\,dy \quad \ldots(9)$$

என்ற தொடர்புகள் நாம் அறிந்தவையாகும். இவற்றை (7) என்ற சமன்பாட்டில் ஈடு செய்து, அச்சமன்பாட்டினை ஆராய் வோம்.

$$r = \frac{dp-s\,dy}{dx}$$

$$t = \frac{dq-s\,dx}{dy}$$

என்ற தொடர்புகள் (8), (9) — லிருந்து பெறுகிறோம்.

அப்பொழுது (7) என்ற சமன்பாடு

$$R\left(\frac{dp-s\,dy}{dx}\right)+Ss = T\left(\frac{dq-s\,dx}{dy}\right)$$

$$+\,U\left[\left(\frac{dp-s\,dy}{dx}\right)\left(\frac{dq-s\,dx}{dy}\right)-s^2\right]=V$$

என மாறிவரும்,

இதைச் சுருக்கி எழுதினுல்

$$R\,dp\,dy - s\,R\,dy^2 + Ss\,dx\,dy + T\,dq\,dx - sT\,dx^2$$
$$+ U(dp\,dq - s\,dp\,dx - s\,dq\,dy + s^2\,dx\,dy - s^2\,dx\,dy)$$
$$= V\,dx\,dy$$ என வரும்.

அதாவது

$$R\,dp\,dy + T\,dq\,dx + U\,dp\,dq - V\,dx\,dy$$
$$= s\,(R\,dy^2 - S\,dx\,dy + T\,dx^2 + U\,dp\,dx + U\,dq\,dy) \quad \ldots(10)$$

இப்பொழுது

$$R\,dp\,dy + T\,dq\,dx + U\,dp\,dq - V\,dx\,dy = 0 \quad \ldots(11)$$
$$R\,dy^2 + T\,dx^2 + U\,dp\,dx + U\,dq\,dy = S\,dx\,dy \quad \ldots(12)$$
$$dz = p\,dx + q\,dy \quad \ldots(13)$$

என்ற சமன்பாடுகளுக்கு

$u\ (x,y,z,p,q) = a$ எனவும்,

$v\ (x,y,z,p,q) = b$ எனவும்

தீர்வுகள் உள்ளன என எடுத்துக் கொள்வோம்.

17-3·4 இப்பொழுது $u=a$, $v=b$ என்ற சார்புகளின் வாயிலாக

$$\left(\frac{\delta u}{\delta x} + p\frac{\delta u}{\delta z}\right)dx + \left(\frac{\delta u}{\delta y} + q\frac{\delta u}{\delta z}\right)dy$$
$$+ \frac{\delta u}{\delta p}\,dp + \frac{\delta u}{\delta q}\,dq = 0 \quad \ldots(14)$$

$$\left(\frac{\delta v}{\delta x} + p\frac{\delta v}{\delta z}\right)dx + \left(\frac{\delta v}{\delta y} + q\frac{\delta v}{\delta z}\right)dy$$
$$+ \frac{\delta v}{\delta p}\,dp + \frac{\delta v}{\delta q}\,dq = 0 \quad \ldots(15)$$

என்று பெறப்படும். இவற்றிலிருந்து dp, dq ஐப் பெறுவோம்.

$$\frac{1}{\frac{\delta u}{\delta p}\frac{\delta v}{\delta q} - \frac{\delta u}{\delta q}\frac{\delta v}{\delta p}} = \frac{dp}{(\qquad)} = \frac{dq}{(\qquad)} \quad \ldots(16)$$

என வரும். இவற்றையெல்லாம் பண்படுத்தி முன் 17·3-1-ல் வகுக்கப்பட்ட R_1, S_1, T_1, U_1, V_1 என்ற குறியீடுகளைப் பயன்படுத்தி எழுதினுல்,

$$-U_1\, dp = T_1\, dx + \left\{ \left(\frac{u,v}{y,q}\right) + \left(\frac{u,v}{z,q}\right) q \right\} dy$$

$$- U_1\, dq = R_1\, dy + \left\{ \left(\frac{u,v}{p,x}\right) + \left(\frac{u,v}{p,z}\right) p \right\} dx$$

என வரும்.

$$\therefore \quad -U_1\, dp\, dx - U_1\, dq\, dy$$

$$= T_1\, dx^2 + R_1\, dy^2 + \left[\left(\frac{u,v}{y,q}\right) + \left(\frac{u,v}{z,q}\right) q + \left(\frac{u,v}{p,x}\right) + \left(\frac{u,v}{p,z}\right) p \right] dx\, dy$$

$= T_1\, dx^2 + R_1\, dy^2 - S_1\, dx\, dy$ எனவும் ...(17)

அவ்வாறே,

$$(U_1\, dp + T_1\, dx)\,(U_1\, dq + R_1\, dy) = (U_1 V_1 + R_1 T_1)\, dx\, dy$$

அதாவது

$$R_1\, dp\, dy + T_1\, dq\, dx + U_1\, dp\, dq - V_1\, dx\, dz = 0 \quad \ldots(18)$$

எனவும் பெறலாம்.

(11)—ம், (18)—ம் ஒப்பிட்டுப் பார்க்க;

(12)—ம், (17)—ம் ஒப்பிட்டுப் பார்க்க;

அப்படி ஒப்பிட்டுப் பார்க்கும் பொழுது

$$\frac{R_1}{R} = \frac{T_1}{T} = \frac{U_1}{U} = \frac{V_1}{V} = \frac{S_1}{S} \quad \ldots (19)$$

என வருவது காண்க:

எனவே (7) என நாம் தீர்வு காண விழைந்த சமன்பாடு, இப்பொழுது $R_1 r + S_1 s + T_1 t + U_1 (rt - s^2) = V_1$ ...(20)

என மாறுகிறது. ஆனுல் (20) என்ற சமன்பாட்டிற்கு $u = f(v)$ என்ற இடைநிலைத் தீர்வு உள்ளதென நாம் அறிவோம்; ஏனெனில் (20) என்ற சமன்பாடு $u=a$, $v=b$, அதாவது $u=f(v)$

என்ற இடைநிலைத் தீர்விலிருந்து பெறப்பட்டதாகும். [(14) முதல் (20) வரை] எனவே, (19)—ன் காரணமாக, (7)—ன் இடைநிலைத் தீர்வு $u=f(v)$ எனப் பெறப்படுகிறது.

17-3·5. இப்பொழுது $U=0$ ஆனால் என்னவாகும் எனப் பார்ப்போம்; அதாவது சமன்பாடு $Rr+Ss+Tt=V$ எனவாகும். (11)—ம், (12)—ம் முறையே,

$$R\ dp\ dy+T\ dq\ dx = V\ dx\ dy \qquad ...(21)$$

$$R\ dy^2+T\ dx^2 \equiv S\ dx\ dy \qquad ...(22)$$

எனவாகும். இவற்றைத் துணைச் சமன்பாடுகள் என்று பெயரிடுவோம்.

(22) ஐ $R\ dy^2 + T\ dx^2 - S\ dx\ dy = 0$

என எழுதி, பொதுவாக அதை இரு வேறு வேறு காரணிகளாக, அதாவது $(A\ dx + B\ dy)\ (C\ dx + E\ dy) = 0$ எனப் பிரிக்கலாம்.

எனவே $A\ dx+B\ dy = 0$ அல்லது

$C\ dx+E\ dy = 0$ என வரலாம்.

இதில் ஒவ்வொன்றையும் $R\ dp\ dy + T\ dq\ dx = V\ dx\ dy$ என்ற சமன்பாட்டோடு கொண்டு, தேவைப்படின் $dz=p\ dx+q\ dy$ என்பதையும் பயன்படுத்தி, $u_1=f\ (v_1)$ என்ற இடைநிலைத் தீர்வும், $u_2 = \varphi\ (v_2)$ என்ற இடைநிலைத் தீர்வும் பெறலாம்.

17-3·51. $S^2 = 4\ R\ T$ என்ற நிலையேற்படுமாயின், (22) ஐ

$(A_1\ dx + B_1\ dy)^2 = 0$ எனக் கண்டு, $A_1dx + B_1dy = 0$ என்ற சமன்பாட்டோடு, $R\ dp\ dy + T\ dq\ dy = V\ dx\ dy$ என்ற சமன்பாட்டையும் கொண்டு. தேவைப்படின் $dz=p\ dx+q\ dy$ என்பதையும் பயன்படுத்தி,

$u = f\ (v)$ என்ற ஓர் இடைநிலைத் தீர்வு காணலாம்.

ஓர் இடைநிலைத் தீர்வு கண்ட பின்பு, இது ஒரு முதல் வரிசைச் சமன்பாடாகலின், முன்னர் முதல் வரிசைச் சமன்பாடுகள் தீர்க்க நாம் கண்ட முறைகளில் ஏதாவதொன்றினைப் பயன்படுத்தி $Rr+Ss+Tt=V$ என்ற சமன்பாட்டின் முழுத் தீர்வினைக் காணலாம்.

17-3·6. பொதுவாக, $U\neq0$ என்ற நிலையில்,

$Rr+Ss+Tt+U\ (rt-s^2)=0$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வு காண முற்படுவோம். இங்கு, துணைச் சமன்பாடுகள் யாவை

யெனின் (11), (12), (13) என நாம் முன் 17-3·3-ல் கண்டனவே யாகும். அவையாவன :

$$R\,dp\,dy+T\,dq\,dx+U\,dp\,dq-V\,dx\,dy=0 \quad \ldots (11)$$

$$R\,dy^2+T\,dx^2+U\,dp\,dx+U\,dq\,dy-S\,dx\,dy=0 \quad \ldots (12)$$

$$dz=p\,dx+q\,dy \quad \ldots (13)$$

$$(12)+\lambda(11)=0 \quad \ldots (23)$$

என்பது எந்த λ-க்கும் பொருந்தும்.

(23) என்பது இரு காரணிகளாகப் பிரிக்கக் கூடிய வகையில் λஐ எடுத்துக் கொள்வோம் (λ இன்னும் நமக்குத் தெரியாது). அப்படியெடுத்தால்

$$\text{இடப்புறம் } (23) \equiv (R\,dy+K\,T\,dx+m\,U\,dp)\left(dy+\frac{dx}{K}+\lambda\frac{dq}{m}\right) \quad \ldots (24)$$

என எழுதப் படலாம். இந்த முற்றொருமைப்படி,

$$R\,dy^2+T\,dx^2-(S+\lambda\,v)\,dx\,dy+U\,dp\,dx+U\,dq\,dy$$
$$+\lambda\,R\,dp\,dy+\lambda\,T\,dq\,dx+\lambda\,U\,dp\,dq$$
$$\equiv (R\,dy+K\,T\,dx+m\,U\,dp)\left(dy+\frac{dx}{K}+\lambda\frac{dq}{m}\right);$$

மேலும், கெழுக்களை ஒப்பிட்டுப் பார்க்கும் போது,

$$K\,T+\frac{R}{K}=-(S+\lambda v) \quad \ldots (a)$$

$$\frac{\lambda R}{m}=U \quad \ldots (b)$$

$$\frac{KT\lambda}{m}=\lambda\,T \quad \ldots (c)$$

$$m\cdot U=\lambda\,R \quad \ldots (d)$$

$$\frac{m\,U}{K}=U \quad \ldots (e)$$

என வரும்.

$\therefore$ (b), (c), (d), (e)-லிருந்து $m=K=\dfrac{\lambda R}{U}$ ... (25)

என்றும், (*a*)-லிருந்து

$$\frac{\lambda R}{U}\ T+\frac{RU}{\lambda R}=-(S+\lambda V)$$

அதாவது

$$\lambda^2\,(RT+UV)+\lambda\,US+U^2=0 \qquad \ldots(26)$$

என்றும் கட்டுப்பாடுகள் வருகின்றன. ஆகவே நாம் எடுத்துக் கொண்ட λ-ன் மதிப்பு, λ_1, λ_2 என (26) என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வுகளாக வரும்; ஆனால் $S^2=4\,(RT+UV)$ என்றிருப்பின் $\lambda_1=\lambda_2$ எனவும் வரும். (அதாவது (26) என்ற இருபடிச் சமன்பாட்டின் தீர்வுகள் சமமாயிருப்பதற்குரிய கட்டுப்பாடு.) எனவே (11), (12) எனப்பட்ட இரு துணைச் சமன்பாடுகளுக்குப் பதிலாக, அவை கொண்டு பெறப்பட்ட இரு சமன்பாடுகளை ஏற்கலாம். அவ்விரு சமன்பாடுகள் யாவையெனின், (23) என்ற சமன்பாட்டில் λ_1-க்குரிய ஒரு சமன்பாடும் λ_2-க்குரிய மற்றொரு சமன்பாடுமாகும். (23) என்ற சமன்பாட்டில் k, m, λ-க்கு ஈடு செய்து அச் சமன்பாடுகளைப் பெறுவோம் :

இப்பொழுது (24)ஐ எழுதினால்,

$$(12)+\lambda\,(11)=\left(R\,dy+\frac{\lambda RT}{U}\,dx+\frac{\lambda R}{U}\,U\,dp\right)$$

$$\times\left(dy+\frac{U\,dx}{\lambda R}+\lambda\frac{U\,dq}{\lambda R}\right)$$

$$=\frac{R}{U}\,(U\,dy+\lambda\,T\,dx+\lambda\,U\,dp)$$

$$\times\frac{1}{\lambda R}\,(\lambda\,R\,dy+U\,dx+\lambda\,U\,dq)$$

$$=\frac{1}{\lambda U}\,(U\,dy+\lambda\,T\,dx+\lambda U\,dp)$$

$$\times\,(U\,dx+\lambda\,R\,dy+\lambda\,U\,dq)$$

எனவே (23) என்ற சமன்பாடு, λ_1, λ_2 என்ற இரு மதிப்புகளுக்கும் தனித்தனியே பொருந்தும் வகையில்

$$(U\,dy+\lambda_1\,T\,dx+\lambda_1\,U\,dp)\,(U\,dx+\lambda_1\,R\,dy+\lambda_1\,U\,dq)=0 \qquad \ldots(27)$$

$$(U\,dy+\lambda_2\,T\,dx+\lambda_2\,U\,dp)\,(U\,dx+\lambda_2\,R\,dy+\lambda_2\,U\,dq)=0 \quad \ldots \quad (28)$$

என வரும்.

(27)-ல் முதற் காரணியையும், (28)-ல் இரண்டாம் காரணியையும் எடுத்து பூச்சியத்திற்குச் சமமாக எழுதினுல், அவ் விரு சமன்பாடுகளினின்றும் u, v என்ற இடைநிலைத் தீர்வுகள் காணலாம். ஆனுல் (27)-ல் முதற் காரணியையும் (28)-ல் முதற் காரணியையும் எடுத்தால்

$U\,dy=0$ என வரும் ; இதிலிருந்து தீர்வு காண முடியாது ; அவ்வாறே (27)-ல் இரண்டாவது காரணியையும், (28)-ல் இரண்டாவது காரணியையும் எடுத்தால்,

$U\,dx=0$ என வரும்; இதிலிருந்தும் தீர்வு காணமுடியாது.

எனவே
$$\left.\begin{aligned} U\,dy+\lambda_1\,T\,dx+\lambda_1\,U\,dp&=0\\ U\,dx+\lambda_2\,R\,dy+\lambda_2\,U\,dq&=0\end{aligned}\right\} \ldots (29)$$

என்ற இரட்டையையும்,

$$\left.\begin{aligned} U\,dx+\lambda_1\,R\,dy+\lambda_1\,U\,dq&=0\\ U\,dy+\lambda_2\,T\,dx+\lambda_2\,U\,dp&=0\end{aligned}\right\} \ldots (30)$$

என்ற இரட்டையையும் எடுத்து

$u_1=f_1(v)$; $u_2=f_2(v)$ என்ற இரண்டு இடைநிலைத் தீர்வுகளைக் காணலாம். ஆனுல் $S^2=4(RT+UV)$ என்ற கட்டுப்பாடு நிலவுமாயின், ($\lambda_1=\lambda_2=\lambda$ எனவரும் பொழுது)

$$\left.\begin{aligned} U\,dy+\lambda\,T\,dx+\lambda\,U\,dp&=0\\ U\,dx+\lambda\,R\,dy=\lambda\,U\,dq&=0\end{aligned}\right\} \ldots (31)$$

என்ற இரு சமன்பாடுகளிலிருந்து

$u=f(v)$ எனக் காணலாம்.

ஒன்று அல்லது இரண்டு இடைநிலைத் தீர்வுகளைக் கண்டபின் முன் பகுதிகளில் முதல் வரிசைச் சமன்பாடுகளின் தீர்வு காணக் கையாண்ட முறைப்படி முழுத் தீர்வு காணலாம்.

17-3·7 தேற்றம் : இரு இடைநிலைத் தீர்வுகள் $u_1=f(v_1)$, $u_2=f(v_2)$ கிடைத்த பின்பு, இவற்றை p, q-ல் உள்ள இரு ஒருங்கமைச் சமன்பாடுகள் எனக் கொண்டு p, q கண்டுபிடிப்போமாஞல் அந்த p, q மதிப்புகள் $dz=p\,dx+q\,dy$ என்ற சமன்பாட்டின் தொகை காணும் வகையில் அமைந்திருக்கும். இதுவே முழுத் தீர்வு ஆகும்.

நிறுவன் முறை மிக நீண்டதாதலின், அது இன்றியே இந்தத் தேற்றத்தை ஏற்றுக் கொள்வோம்.

மாங்கே முறைப்படி $Rr+Ss+Tt=V$ என்ற சமன்பாட்டின் தீாவு காண நடைமுறை.

(1) $$dp= r\,dx=s\,dy$$
$$dq=s\,dx+t\,dy$$

என்ற தொடர்புகளைக் கொண்டு, கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டினை $R\,dp\,dy+T\,dq\,dx-V\,dx\,dy=s(R\,dy^2-S\,dx\,dy+T\,dx^2)$ என மாற்றியமைத்தல் :

$$R\,dp\,dy+T\,dq\,dx-V\,dx\,dy=0$$

$R\,dy^2-S\,dx\,dy+T\,dx^2=0$ என்ற சமன்பாடுகள் காணல்,

(2) $R\,dy^2-S\,dx\,dy+T\,dx^2=0$ என்ற சமன்பாட்டை

$dy-A\,dx=0$, $dy-B\,dx=0$

என்ற இரு சமன்பாடுகளாக, காரணி முறைப்படி எழுதுதல்.

(3) இவ்விரண்டில், ஏதேனும் ஒன்றையும் (எடுத்துக் காட்டாக $dy-A\,dx=0$ என்ற சமன்பாட்டையும்)

$R\,dp\,dy+T\,dq\,dx-V\,dx\,dy=0$ என்ற சமன்பாட்டையும், தேவைப்படின் $dz=p\,dx+q\,dy$ என்ற தொடர்பையும் கொண்டு $u_1=a_1$, $v_1=b_1$ என்ற தீர்வுகளைக் கண்டு $u_1=f_1(v)$ என்ற இடைநிலைத் தீர்வைக் காணல். (f_1 என்பது ஒரு தன்னிச்சையான சார்பு) அவ்வாறே (2)-ல் கண்ட மற்றென்றையும்(அதாவது $dy-B\,dx=0$) பயன்படுத்தி $u_2=f_2(v)$ என்ற மற்ருேர் இடைநிலைத் தீர்வைக் காணல்.

(4) ஏதாவது ஓர் இடைநிலைத் தீர்வு கண்டு, முதல் வரிசைச் சார்புக்கு உரிய முறைப்படி முழுத் தீர்வு காணல்.

(5) இரண்டு இடைநிலைத் தீர்வுகள் கிட்டிவிடுமானால், p, q என்பனவற்றை அவற்றினின்றும் கண்டு $dz=p\ dx+q\ dy$ என்ற தொடர்பில் ஈடு செய்து, முறைப்படி முழுத் தீர்வு காணல்.

இவை படிப்படியாகச் செய்ய வேண்டிய முறைகளாகும்.

17-3·81 எடுத்துக்காட்டு :

$q^2r-2pqs+p^2t=pq^2$ என்ற சமன்பாட்டின் முழுத் தீர்வினை மாங்கே முறைப்படி காண்க.

இங்கு $R=q^2$; $S=-2pq$; $T=p^2$; $V=pq^2$.

எனவே முதல்படியாக,

$$q^2\ dp\ dy + p^2\ dq\ dx - pq^2\ dx\ dy$$
$$= s(q^2\ dy^2+p^2\ dx^2+2pq\ dx\ dy)$$

என்ற மாற்றமைப்பைப் பெறுகிறோம்.

இரண்டாம் படியாக,

$$q^2\ dy^2+p^2\ dx^2+2pq\ dx\ dy$$
$$\equiv\ (q\ dy+pdx)^2 = 0 \text{ என எழுதி}$$

$p\ dx+q\ dy = 0$ என்ற சமன்பாட்டைப் பெறுகிறோம்.

மூன்றும் படியாக $p\ dx+q\ dy=dz$ என்ற தொடர்பின் உதவி கொண்டு $z=c$ (மாறிலி) பெறப்படும்.

மேலும் $q\ dy=-p\ dx$ என்ற தொடர்பினை $q^2dp\ dy+p^2dq\ dx-pq^2\ dx\ dy = 0$ என்ற சமன்பாட்டில் ஈடு செய்து,

$-pq\ dp\ dx+p^2\ dq\ dx+p^2q\ dx^2 = 0$ என்று பெற்றால், இதை $pdx = 0$ எனவும்,

$$-q\ dp+p\ dq+pq\ dx = 0$$

எனவும் பிரித்து எழுதலாம்.

$p\ dx = 0$ என்பதை விடுத்து,

$-q\ dp+p\ dq+pq\ dx = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வு காணலாம். இரு பக்கங்களையும் pq ஆல் வகுக்கும்பொழுது,

$$-\frac{dp}{p}+\frac{dq}{q}+dx = 0 \text{ என வரும்.}$$

இதன் தீர்வு,

$x+\log q+\log K = \log p$ (K—மாறிலி)

$$\therefore \quad x = \log\left(\frac{p}{qK}\right)$$

$$\therefore \quad e^x = \frac{p}{qK}$$

$\therefore \quad e^x q - p f(z) = 0$ (ஏனெனில் z = மாறிலி $\therefore 1/K=f(z)$ இதுதான் இடைநிலைத் தீர்வு.

நான்காம் படியாக,

$e^x q - p f(z) = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வு காண்போம்.

இலாகிராஞ்ஜின் முறைப்படி,

$$\frac{dx}{f(z)} = \frac{dy}{-e^x} = \frac{dz}{0}$$

z = மாறிலி (இது முன்னரே பெற்றதாம்).

$$\therefore \quad \frac{dx}{f(c)} = \frac{dy}{-e^x}$$

$$\therefore \quad -\int e^x\,dx = f(c)\int dy.$$

$$\therefore \quad c_1 - e^x = y f(c) \qquad [c_1\text{—மாறிலி}]$$

$$\therefore \quad y = \frac{-e^x}{f(z)} + \varphi_1(z)$$

$$= e^x \varphi_2(z) + \varphi_1(z)$$

என்ற முழுத் தீர்வு கிடைக்கும்.

எடுத்துக்காட்டு 2 : மாங்கே முறைப்படி

$q(yq+z)r - p(2yq+z)s + y p^2 t + p^2 q = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வு காண்க.

முதற் படி :

$$R = q(yq+z); \quad S = -p(2yq+z)$$

$$T = yp^2 \quad ; \quad V = -p^2 q$$

$dp = r\,dx + s\,dy$; $dq = s\,dx + t\,dy$ என்ற ஈடுசெய்து பெறப்படும் சமன்பாடுகளாவன :

$$R\,dp\,dy + T\,dq\,dx - V\,dx\,dy$$
$$\equiv q\,(yq+z)\,dp\,dy + yp^2\,dq\,dx + p^2q\,dx\,dy = 0 \qquad \ldots (1)$$
$$R\,dy^2 - S\,dx\,dy + T\,dx^2$$
$$\equiv q\,(yq+z)\,dy^2 + p\,(2yq+z)\,dx\,dy + yp^2\,dx^2 = 0 \qquad \ldots (2)$$

மேற்கூறிய (1)-ம், (2)-ம் மாங்கே துணைச் சமன்பாடுகள்.

இரண்டாவது படி :

இரண்டாவது துணைச் சமன்பாடு :

$$0 = q\,(yq+z)\,dy^2 + p\,(2yq+z)\,dx\,dy + yp^2dx^2$$
$$= q\,(yq+z)\,dy^2 + p\,(yq+z)\,dx\,dy + pyq\,dx\,dy + yp^2\,dx^2$$
$$= (yq+z)\,dy\,[q\,dy + p\,dx] + py\,dx\,[q\,dy + p\,dx]$$
$$= (p\,dx + q\,dy)\,[(yq+z)\,dy + py\,dx] = 0$$

∴ காரணிகளாகப் பிரிக்கப்பட்டபின் பெறப்படும் சமன்பாடுகளாவன : $p\,dx + q\,dy = 0$

$$(yq+z)\,dy + py\,dx = 0$$

மூன்றாவது படி :

$$p\,dx + q\,dy = 0$$
$$q\,(yq+z)\,dp\,dy + yp^2\,dq\,dx + p^2q\,dx\,dy = 0$$
$$p\,dx + q\,dy = dz$$

என்ற மூன்றையும் எடுத்துக் கொள்வோம்.

$z = c$ (மாறிலி) என்ற தொடர்பு தெரிகிறது.

மேலும் $p\,dx = -q\,dy$ என்ற தொடர்பை இரண்டாவது சமன்பாட்டில் ஈடு செய்தால்,

$$-(yq+z)\,dp\,(p\,dx) + yp^2\,dq\,dx + p^2q\,dx\,dy = 0$$

என வரும்.

$p\,dx$ என்ற காரணியை நீக்கி விட்டால்,

$-(yq+z)\,dp + yp\,dq + pq\,dy = 0$ என வரும்.

அதாவது $-(yq+z)\,dp + p\,(y\,dq + q\,dy) = 0$ என வரும்.

$dz=0$ ஆகையால், $p\,dz$ ஐ இந்தச் சமன்பாட்டில் கூட்டுவதால், சமன்பாடு மாறாது. அதாவது

$-(yq+z)\,dp + p\,(y\,dq + q\,dy) + p\,dz = 0$ என்பதும் உண்மையே.

$$\therefore \frac{dp}{p} = \frac{y\,dq+q\,dy+dz}{yq+z}$$

இதன் தீர்வு $\dfrac{yq+z}{p} = b$ ($b-$மாறிலி)

$= f(z)$ என எழுதலாம்.

அதாவது $\dfrac{yq+z}{p} = f(z)$ என்ற ஓர் இடைநிலைத் தீர்வு பெறப்படுகிறது.

அதாவது $p\,f(z) - qy - z = 0$

இதன் இலகிராஞ்ஜி சமன்பாடு,

$$\frac{dx}{f(z)} = \frac{dy}{-y} = \frac{dz}{z}$$

பின்னிரண்டு வழியாக $yz=c$ (மாறிலி) என்று பெறுகிறோம்.

மேலும் $\dfrac{dx}{f(z)} = \dfrac{dz}{z}$ என்பது மூலம்,

$$x = \int \frac{f(z)}{z}\,dz$$

$$= \varphi_1(z)+c_1 \quad (c_1-\text{மாறிலி})$$

$$= \varphi_1(z)+\varphi_2(yz)$$

என்ற முழுத் தீர்வு பெறப்படுகிறது.

அடுத்தபடியாக, இப்பொழுது $(yq+z)\,dy+yp\,dx = 0$ $q\,(yq+z)\,dy\,dp+yp^2\,dx\,dq+p^2q\,dx\,dy = 0$ என்ற இரு சமன்பாடுகளின் தீர்வு காண்போம்; உதவிக்காக $p\,dx + q\,dy = dz$ என்ற தொடர்பும் இருக்கிறது. இங்கு முதல் சமன்பாட்டை $z\,dy+y\,(p\,dx+q\,dy)=0$ என எழுதலாமாதலின் $z\,dy+y\,dz = 0$ என வரும்.

$$\therefore \quad \frac{dy}{y} + \frac{dz}{z} = 0$$ என வரும்.

$\therefore \quad yz = e$ (e—மாறிலி) என வரும்.

முதல் சமன்பாட்டிலிருந்து, இரண்டாவது சமன்பாட்டில் ஈடு செய்ய,

$$-ypq\ dx\ dp + yp^2\ dx\ dq + p^2q\ dx\ dy = 0$$ என வரும்.

பொதுக் காரணியான $p\ dx$ ஐ நீக்கியெழுதினுல்

$$-yq\ dp + yp\ dq + pq\ dy = 0$$ என வரும்.

முழுவதையும் pqy ஆல் வகுத்தால்

$$-\frac{dp}{p} + \frac{dq}{q} + \frac{dy}{y} = 0$$ என வரும்.

இதன் தீர்வு, $\frac{yq}{p} = g$ (g—மாறிலி)

$\therefore \quad yq = p \times$ மாறிலி

$= p\ \phi\ (yz)$ என்பது மற்ருேர் இடைநிலைத் தீர்வாகும்.

இப்பொழுது, இதற்குரிய இலகிராஞ்ஜி சமன்பாடுகள்

$$\frac{dx}{\phi(yz)} = \frac{dy}{-y} = \frac{dz}{0}$$

$\therefore \quad z = h$ (மாறிலி)

$$\therefore \quad \frac{dx}{\phi(hy)} = \frac{dy}{-y}$$

$$\therefore \quad x = \int -\frac{\phi\ (hy)}{y}\ dy$$

$= \varphi_3\ (hy) + K$ (K—மாறிலி)

$= \varphi_3\ (yz) + \varphi_4\ (z)$ என வரும்.

இரு முறைகளிலும் கண்ட முழுத் தீர்வு,

$x = \varphi_1\ (z) + \varphi_2\ (yz)$ என வருவது காண்க.

மாற்று முறையாக,

இரு இடைநிலைத் தீர்வுகளையும் எடுத்துக் கொள்வோம்.

அதாவது $yq+z = p\,f(z)$ என்பதையும்
$yq = p\,\phi(yz)$ என்பதையும் எடுத்துக்கொண்டு,
$dz = p\,dx+q\,dy$ என்ற தொடர்பையும் பயன் படுத்துவோம். இவ் வழியாக,

$$p = \frac{z}{f(z)-\phi(yz)}$$

$$q = \frac{1}{y}\left[\frac{z\,\phi(yz)}{f(z)-\phi(yz)}\right]$$

எனப் பெறலாம். இவற்றை $p\,dx+q\,dy=dz$ என்ற தொடர்பில் ஈடு செய்ய,

$$\frac{z\,dx}{f(z)-\phi(yz)}+\frac{z\,\phi(yz)}{y\,[f(z)-\phi(yz)]}\,dy=dz$$

என வரும். இதைச் சுருக்கி எழுதினுல்

$yz\,dx+z\,\phi(yz)\,dy = y\,dz\,[f(z)-\phi(yz)]$ என வரும்.

$f(z) = z\,f_1(z)$ எனவும்,

$\phi(yz)=yz\,\phi_1(yz)$ எனவும் எழுதினுல்,

மேற்கூறிய சமன்பாடு $yz\,dx+yz^2\phi_1\,(yz)\;\;dy=yz\,f_1(z)\;\;dz$ $-y^2z\,\phi_1(yz)\,dz$ என வரும். இதைச் சுருக்கினுல்

$dx+z\,\phi_1(yz)dy=f_1\,(z)dz-y\,\phi_1(yz)dz$

அதாவது

$$dx=f_1(z)\;dz-[y\,\phi_1(yz)\;dz+z\,\phi_1(yz)\;dy]$$

$=f_1\,(z)\;dz-\phi_1(yz)\;d(yz)$ என வரும். இதன் தீர்வு

$$x=\int f_1\,(z)dz-\int\phi_1\,(yz)\;d(yz)$$
$$=F_1\,(z)+F_2\,(yz)$$

என்று முன்பெற்ற மாதிரியே வருவதும் காண்க,

பயிற்சி 17·2

பின்வரும் சமன்பாடுகளின் தீர்வுகளை மாங்கே முறைப்படி காண்க. ($Rr+Ss+Tt=V$ என்ற அமைப்பு)

(1) $pt-qs+q^3=0.$

(2) $x(r+2xs+x^2t)=p+2x^3$

(3) $(e^x-1)\;(qr-ps)=pq\,e^x.$

(4) $q^2r-2pqs+p^2t=0.$

(5) $(1-q^2)\ r-2\ (2-p-2q+pq)s+(p-2)^2\ t=0$

(6) $qr-ps=0.$

(7) $x^2r+2xys+y^2\ t=0.$

விடை 17·2

(1) இ.நி.தீ. $[x-f(z)]\ q+1=0.$

மு.தீ. $y+xz=\varphi_1(z)+\varphi_2(x)$; $[\int f(z)dz=\varphi_1(z)]$

(2) இ.நி.தீ. $p+xq=x^3+x\ f(x^2-2y).$

மு.தீ. $4z=x^4+2x^2 f(x^2-2y)+4\varphi(x^2-2y).$

(3) இ.நி.தீ. $p=\phi(z)$

மு.தீ. $x=\varphi_1(z)+\varphi_2(y)+e^x.$

(4) இ.நி.தீ. $p=q f(z).$

மு.தீ. $y=\varphi_1(z)-x\ \varphi_2(z).$

(5) இ.நி.தீ. $\dfrac{q-1}{p-2}=f(y+2x-z).$

மு.தீ. $x+y\ \varphi_1(y+2x-z)=\varphi_2(y+2x-z).$

(6) மு.தீ. $x=f(z)+\varphi(y).$

(7) மு.தீ. $z=xf\left(\dfrac{y}{x}\right)+\varphi\left(\dfrac{y}{x}\right)$

17·3·9·1 மாங்கே முறைப்படி

$Rr+Ss+Tt+U(rt-s^2)=V$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வு காண நடைமுறை :

முதல் படியாக,

$\lambda^2(RT+UV)+\lambda US+U^2=0$ என்ற சமன்பாடமைத்து, λ_1, λ_2 என்று அதன் தீர்வுகளைக் காண்க.

$$\left.\begin{aligned} U\,dy+\lambda_1 T\,dx+\lambda_1 U\,dp&=0\\ U\,dx+\lambda_2 R\,dy+\lambda_2 U\,dq&=0\end{aligned}\right\}$$

என்ற இரட்டையும்,

$$\left.\begin{aligned} U\,dx+\lambda_1 R\,dy+\lambda_1 U\,dq&=0\\ U\,dy+\lambda_1 T\,dx+\lambda_2 U\,dp&=0\end{aligned}\right\}$$

என்ற இரட்டையும் எழுதுக.

முதல் இரட்டையிலிருந்து $u_1=a_1$, $v_1=b_1$ என்ற இடைநிலைச் சமன்பாடு $u_1=f_1(v_1)$ எனப் பெறுக. இரண்டாவது இரட்டையிலிருந்து $u_2=a_2$, $v_2=b_2$ என்ற இடைநிலைச் சமன்பாடு $u_2=f_2(v_2)$ எனப் பெறுக. பிறகு $Rr+Ss+Tt=V$ என்ற சமன்பாட்டில் தொடர்ந்து கையாளப்பட்ட முறையைப் பின்பற்றுக.

குறிப்பு 1 $u_1=f_1(v_1)$; $u_2=f_2(v_2)$ என்ற இடைநிலைத் தீர்வுகளிலிருந்து பெறப்படும் p, q என்ற மதிப்புகளைக் கொண்டு, சில சமயங்களில் $dz=p\,dx+q\,dy$ என்ற சமன்பாட்டினைத் தீர்க்க முடியாமல் போனாலும் போகலாம். அப்பொழுது ஏதாவது ஓர் இடைநிலைத் தீர்வைக் கொண்டு சார்ப்பி (Charpit) முறையைக் கையாளலாம். அல்லது $u_1=f_1(v_1)$, $u_2=a$ (a-மாறிலி) என்பவற்றை இடைநிலைத் தீர்வுகளாகக் கொண்டு, p, q-ன் மதிப்புகளையறிந்து $dz=p\,dx+q\,dy$ என்ற தொடர்பின் உதவி கொண்டு முழுத் தீர்வைக் காணலாம். இந்த முழுத் தீர்வில், a என்ற மாறிலியும், தொகை காணும்பொழுது முறைப்படி தோன்றும் மற்றொரு மாறிலியும், ஒரு தன்னிச்சையான சார்பும் தோன்றும். பொதுத் தீர்வு காண, இலாகிராஞ்ஜி முறையைப் பயன்படுத்தலாம்.

$\lambda^2(RT+UV)+\lambda\,US+U^2=0$ என்ற சமன்பாட்டின் இரு தீர்வுகளும் சமமாகிவிட்டால், $u_1=f(v_1)$ என்ற ஒரே ஓர் இடைநிலைத் தீர்வு மட்டுமே வரும்.

இங்கும் முன் பத்தியில் கூறியபடி, $u_1 f(v_1)$, $v_1=b$ என்ற இரு சமன்பாடுகளிலிருந்து p, q கண்டு,

$$dz=p\,dx+q\,dy$$

என்ற தொடர்பைப் பயன்படுத்தி

$w_1=c$ என்ற தொகையைக் காணலாம்.

p, q மறுபடியும் w_1-ல் தோன்றுமாயின்

$$w_1=c$$
$$v_1=b$$
$$u_1=f(b)$$

என்ற மூன்று சமன்பாடுகளிலிருந்து p,q-இரண்டையும் நீக்கி முழுத் தீர்வு காணலாம். இரண்டு மாறிலிகள் b, c இங்குத் தோன்றுமாதலின், இது ஒரு முழுத் தீர்வு ஆகும்.

17-3·91. எடுத்துக்காட்டு 1:

மாங்கே முறைப்படி

$3s-2(rt-s^2)=2$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வு காண்க.

இங்கு $R=0,\ S=3,\ T=0,\ U=-2,\ V=2.$

எனவே முதல் படியாக,

$$\lambda^2(RT+UV)+\lambda US+U^2=0$$

என்ற சமன்பாடு அமைப்போம்.

$$\lambda^2(0-4)+\lambda(-6)+4=0$$

அதாவது $4\lambda^2+6\lambda-4=0$

அல்லது $2\lambda^2+3\lambda-2=0$

$$\lambda=-2,\ \tfrac{1}{2}$$

இப்பொழுது இரட்டைச் சமன்பாடுகளை எழுதுவோம்.

முதல் இரட்டைச் சமன்பாடு:

$$-2dy+4dp=0$$
$$-2dx-dq=0$$

அல்லது $\left.\begin{aligned}2dp-dy&=0\\ dq+2dx&=0\end{aligned}\right\}$ ... (A)

மற்றோர் இரட்டைச் சமன்பாடு:

$$-2dx+4dq=0$$
$$-2dy-dq=0$$

அல்லது $\left.\begin{aligned}2dq-dx&=0\\ dp+2dy&=0\end{aligned}\right\}$ ... (B)

(A) ஐ எடுத்துக் கொண்டால்,

$2p-y=a$ (a—மாறிலி)

$q+2x=b$ (b—மாறிலி)

$\therefore\ (y-2p)=f(2x+q)$ ... (C)

என்ற ஓர் இடைநிலைத் தீர்வு கிடைக்கும்.

அவ்வாறே (B)-ன்படி, $2y+p=\varphi(x-2q)$ ... (D)

என்ற மற்றோர் இடைநிலைத் தீர்வு கிடைக்கும்,

இரு இடைநிலைத் தீர்வுகளிலும் q என்பது சார்பில் தோன்று வதால் $dz=pdx+qdy$ என்ற தொடர்பு பயன்படாது போகிறது.

எனவே $y-2p = f(2x+q)$ என்ற சமன்பாடு கொண்டு, தம்மிச்சையான மாறிலிகள் தோன்றும் ஒரு முழுத் தீர்வு காண முயல்வோம்.

$f(2x+q) = \alpha(2x+q)+\beta$ என எடுத்துக் கொள்வோம்; α, β என்பவை தம்மிச்சையான மாறிலிகள்.

எனவே, $y-2p = \alpha(2x+q)+\beta$ என்ற சமன்பாடு கொண்டு முழுத் தீர்வு காண்போம். இதை

$2p+\alpha q = y-2\alpha x-\beta$ என எழுதினுல் இலகிராஞ்ஜின் சமன்பாடு,

$$\frac{dx}{2} = \frac{dy}{\alpha} = \frac{dz}{y-2\alpha x-\beta}$$

முதலிரண்டிலிருந்து,

$\alpha x=2y+K_1$ என வரும்.

இதை மூன்றில் ஈடு செய்தால்,

$$\frac{dy}{\alpha} = \frac{dz}{-3y-2K_1-\beta} \text{ என வரும்.}$$

இதன் தீர்வு, $\alpha z = -\int(3y+2K_1+\beta)\,dy+K_2$

$$= -\frac{3y^2}{2}\ (2K_1+\beta)\,y+K_2$$

இங்கு $K_1 = \alpha x-2y$; $K_2 = \varphi_1(\alpha x-2y)$

எனவே,

$$\alpha z = \frac{-3y^2}{2} - (\beta+2\alpha x-4y)\,y+\varphi_1(\alpha x-2y)$$

$$= \frac{5y^2}{2} - (\beta+2\alpha x)\,y+\varphi_1(\alpha x-2y)$$

என்ற முழுத் தீர்வு பெறப்படும். இங்கு α, β என்ற இரு தம்மிச்சையான மாறிலிகளும் φ_1 என்ற ஒரு தன்னிச்சையான சார்பும் வரும்.

இவ்வாறே

$$2y+p = \varphi\,(x-2q)$$
$$= \gamma\,(x-2q)+\delta$$ எனக் கொள்வோம். இதை

$p + 2\gamma q = \gamma x-2y+\delta$ என எழுதினுல் இலகிராான்ஜின் சமன்பாடுகள்

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{2\gamma} = \frac{dz}{\gamma x-2y+\delta}$$ என வரும்.

$\therefore\ y = 2\gamma x+K_8$ என வரும்.

பிறகு $$\frac{dx}{1} = \frac{dz}{\gamma x-4\gamma x-2K_8+\delta}$$

$$= \frac{dz}{-3\gamma x-2K_8+\delta}$$

$$\therefore\ z = -\int (3\gamma x+2K_8-\gamma)\,dx$$

$$= -\frac{3\gamma x^2}{2}-2x(y-2\gamma x)+\delta x$$
$$+\varphi_2\,(y-2\gamma x)$$
$$= \frac{5\gamma x^2}{2}-2xy+\delta x+\varphi_2\,(y-2x)$$

இங்கும் γ, δ என்ற இரு தம்மிச்சையான மாறிலிகளும், φ_2 என்ற ஒரு தன்னிச்சையான தொடர்பும் வரும்.

பயிற்சி 17·3

பின்வரும் சமன்பாடுகளின் தீர்வுகளை மாங்கே முறைப்படி காண்க. [$Rr+Ss+Tt+U\,(rt-s^2)=V$ என்ற அமைப்பு]

(1) $3r+s+t+(rt-s^2)= -9$

(எடுத்துக்காட்டில் விளக்கிய முறையைப் பயன் படுத்துக.)

(2) $xqr+(p+q)\,s+ypt+(xy-1)\,(rt-s^2)+pq=0$

(3) $yr-ps+t+y\,(rt-s^2)+1=0$

விடை 17·3

(1) இடைநிலைத் தீர்வுகள்

(i) $p+2y+x=f\,(q+2y-3x)$
(ii) $p-3y+x=g\,(q+3y+2x)$

(i) $p+2y+x=\alpha(q+3y-3x)+\beta$ என எடுத்துக் கொண்டால்,

முழுத் தீர்வு $z=\frac{1}{2}\,(3\alpha^2-5\alpha-1)x^2+(3\alpha-2)xy+\beta x$
$+\varphi_1\,(y+\alpha x)$

(i) $p-3y+x=\gamma\,(q+3y+2x)+\delta$ என எடுத்துக் கொண்டால்,

முழுத் தீர்வு $z=\frac{1}{2}\,(3\gamma^2+5\gamma-1)\,x^2+3\,(\gamma+1)\,xy+\delta x$
$+\varphi_2\,(y+\gamma x)$

(2) இடைநிலைத் தீர்வு :

$xp+q=f\,(yq+p)$

அல்லது $yq+p=g\,(xp+q)$

இரண்டாவது இடைநிலைத் தீர்வு பெற இயலாது.

$xp+q=\alpha\,(yq+p)+\beta$ என எடுத்துக் கொண்டால்,

முழுத் தீர்வு $z=\beta\log\,(x-\alpha)+\varphi\,[\,[x-\alpha)^{\alpha}(1-\alpha y)\,]$

(3) இடை நிலைத் தீர்வு,

$yp+x=f\,(q+y)$

இரண்டாவது இடைநிலைத் தீர்வு பெற இயலாது.

$yp+x=\alpha\,(q+y)+\beta$ என எடுத்துக் கொண்டால்

முழுத் தீர்வு $z=\frac{1}{6\alpha^2}\Big[\,2y^3-3\alpha^2y^2+6\alpha xy+6\beta y$
$+\varphi\,(\alpha x+\frac{1}{2}\,y^2)\Big]$

18. இரண்டாம் வரிசை, பகுதி வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகள்– ஒழுங்கு முறையான உருவமைப்புகள் (Canonical forms)

18-1. $Rr+Ss+Tt+Pp+Qq+Zz=U$ ...(A)

என்ற சமன்பாட்டை எடுத்துக் கொள்வோம். R, S, T என்பவை x, y-ன் தொடர்ச்சியான சார்புகள், எந்த வரிசையளவுக்கு வேண்டுமானாலும் பகுதி வகைக்கெழு படைத்தவை.

$L \equiv R\frac{\delta^2}{\delta x^2}+S\frac{\delta^2}{\delta x\,\delta y}+T\frac{\delta^2}{\delta y^2}$ என்பது ஒரு செயலி யெனக் கொண்டால், இச்சமன்பாடு (A)ஐ

$L(z)+f(x, y, z, p, q)=0$ ...(B)

என எழுதலாம்.

$(A)-(B)$, இரண்டையும் ஒப்பிட்டால்,

$L(z)=Rr+Ss+Tt$ ...(C)

$f(x, y, z, p, q)=Pp+Qq+Zz-U$ ...(D)

$u=u(x, y)$; $v=v(x, y)$ என்ற புதுச் சார்புகளையொட்டி (A) ஐ மாற்றியமைத்தால், நாம் இலாப்ளாஸ் மாற்றமைப்பு என்ற பகுதியில் (பகுதி 17-1·2) கண்டபடி, (A) என்ற சமன்பாடு

$R'Z_{uu}+2S'Z_{uv}+T'Z_{vv}+P'Z_u+Q'Z_v+Zz=V(u, v)$ ...(E)

என்ற மாறுதல் பெறும்.

$$R' = R\,(u_x)^2 + S\,u_x u_y + T\,(u_y)^2 \qquad ...(1)$$

$$2S' = 2R\,u_x v_x + S\,(v_x u_y + v_y u_x) + 2\,T\,u_y v_y \qquad ...(2)$$

$$T' = R\,(v_x)^2 + S\,v_x v_y + T\,(v_y)^2 \qquad ...(3)$$

$$P' = R\,u_{xx} + S\,u_{xy} + T\,u_{yy} + P u_x + Q u_y \qquad ...(4)$$

$$Q' = R\,v_{xx} + S\,v_{xy} + T\,v_{yy} + P v_x + Q v_y \qquad ...(5)$$

$V(u, v) = U(x, y)$—மாற்றமைப்பு ...(6)

(E) என்ற சமன்பாட்டை

$$R' z_{uu} + 2S' z_{uv} + T' z_{vv} + F(u, v, z, z_u, z_v) = 0 \qquad ...(F)$$

எனச் சுருக்கமாக எழுதலாம். அதாவது

$$F(u, v, z, z_u, z_v) = P' z_u + Q' z_v + Zz - V(u, v) \qquad ...(G)$$

18-1·1 : இப்பொழுது $u(x, y)$, $v(x, y)$ என்ற சார்புகளைப் பயன்படுத்தி (A) என்ற சமன்பாட்டினை (F) என்ற வடிவில் கொண்டுவந்திருக்கிறோம். இனி (F) என்ற வடிவத்திலேயே, சமன்பாட்டினை ஆராய்வோம்.

இப்பொழுது (1) ஐயும், (3) ஐயும் ஒப்பிட்டுப் பார்த்தால், அவையிரண்டும் ஒரே மாதிரியாக இருப்பதைக் காணலாம்.

$R\alpha^2 + S\alpha + T = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வுகள் λ_1, λ_2 என இரு வேறு வேறு தீர்வுகளெனக் கொள்வோம். அப்பொழுது $S^2 - 4RT > 0$ ஆக இருக்க வேண்டும்.

$S^2 - 4RT = 0$ ஆனல் λ_1, λ_2 இரண்டும் சமமாயிருக்கும்; இதை λ எனக் கொள்ளலாம்.

$S^2 - 4RT < 0$ ஆனல் இரு தீர்வுகளும் இணைந்த சிக்கல் மதிப்பாக, $\lambda_1 + i\,\lambda_2$, $\lambda_1 - i\lambda_2$ என்றவாறு இருக்கும்.

18-1·2 இம்மூன்று நிலைகளிலும் (F) என்ற வடிவிலுள்ள சமன்பாட்டை, மிகக் கச்சிதமான சமன்பாடுகளாக மாற்றியமைக்கலாமென இப்பொழுது நிறுவ முற்படுவோம்.

(a) $S^2 - 4RT > 0$ எனக் கொள்க.

$R\,\alpha^2 + S\alpha + T = 0$-ன் தீர்வுகள் λ_1, λ_2 என இரு வேறு வேறு தீர்வுகளாகும்.

$$\frac{dy}{dx} + \lambda_1(x, y) = 0 \qquad ...(7)$$

$$\frac{dy}{dx} + \lambda_2 (x, y) = 0 \qquad ...(8)$$

என்ற இரு சமன்பாடுகளின் தீர்வுகள் $u(x,y)=c_1$, $v(x,y)=c_2$ என வரும். இந்த u, v என்ற சார்புகளையே, நாம் ஏற்று (A) என்ற சமன்பாட்டை (E) என்ற சமன்பாடாக மாற்றியமைக்கிறோம். அதாவது (B) என்ற சமன்பாட்டை (F) என்ற வடிவத்திற்குக் கொண்டு வருகிறோம். இப்படி u, v என்று மேற்கூறியபடி பெறப் பட்ட சார்புகளை, புதுச் சார்புகளாக ஏற்று மாற்றம் செய்யும் பொழுது, R'-ம், T'-ம் பூச்சியமாவதைப் பார்க்கிறோம்.·ஏனெனில்,

$$\frac{\delta u}{\delta x} + \frac{\delta u}{\delta y} \; \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{\delta v}{\delta x} + \frac{\delta v}{\delta y} \; \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\therefore \; \frac{dy}{dx} = \frac{-\dfrac{\delta u}{\delta x}}{\dfrac{\delta u}{\delta y}}$$ என முதலிலும்,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-\dfrac{\delta v}{\delta x}}{\dfrac{\delta v}{\delta y}}$$ என இரண்டாவதாகவும் பெறப் படுகிறது.

$$\frac{dy}{dx} + \lambda_1 (x, y) = 0 \; ;$$

$$\frac{dy}{dx} + \lambda_2 (x, y) = 0$$ என்ற சமன்பாடுகளிலிருந்து

முறையே $u\,(x, y)$-ம், $v\,(x, y)$-ம் பெறப்படுவதால்

$$\frac{-\dfrac{\delta u}{\delta z}}{\dfrac{\delta u}{\delta y}} = -\,\lambda_1 (x, y)$$

$$\frac{-\dfrac{\delta v}{\delta x}}{\dfrac{\delta v}{\delta y}} = -\,\lambda_2 (x, y)$$

என்பவை உண்மையாகும்,

எனவே $\frac{\delta u}{\delta x} = \lambda_1 (x, y) \frac{\delta u}{\delta y}$ $[u_x = \lambda\, u_y]$

$$\frac{\delta v}{\delta x} = \lambda_2 (x, y) \frac{\delta v}{\delta y} \quad [v_x = \lambda_2\, v_y]$$

என்பவை u, v ஐப் பொருத்திய தொடர்புகளாகின்றன. இத் தொடர்புகளை $R' = R\,(u_x)^2 + S\,(u_x u_y) + T\,(u_y)^2$ என்ற தொடர்பில் ஈடு செய்தால்,

$$R' = R\,\lambda_1^2 (u_y)^2 + S\,\lambda_1 u_y^2 + T u_y^2$$
$$= (R \cdot \lambda_1^2 + S\,\lambda_1 + T)\, u_y^2$$
$$= 0$$ [λ_1 என்பது $R\alpha^2 + S\alpha + T = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் ஒரு தீர்வு]

அவ்வாறே,

$$T' = R\,(v_x)^2 + S\,(v_x v_y) + T\,(v_y)^2$$
$$= R\,\lambda_2^2\, v_y^2 + S\lambda_2\, v_y^2 + T v_y^2$$
$$= (v_y)^2\, [R\lambda_2^2 + S\lambda_2 + T]$$
$$= 0$$ [λ_2 என்பது $R\alpha^2 + S\alpha + T = 0$ என்ற சமன் பாட்டின் மற்றொரு தீர்வு]

எனவே (7), (8) என்ற சமன்பாடுகளினின்றும் பெறப்பட்ட u, v என்ற சார்புகளை நாம் மாற்றச் சார்புகளாக ஏற்பதால், $R' = 0$, $T' = 0$ ஆகிறது. எனவே (F) என்ற சமன்பாடு,

$2\,S'\, z_{uv} + F\,(u, v, z, z_u, z_v) = 0$ என்று உரு மாறுகிறது. $S' \neq 0$ ஆகவிருப்பின், முழுவதும் $2S'$ஆல் வகுத்தால்,

$$z_{uv} = f\,(u, v, z, z_u, z_v) \qquad ...(H)$$

என்ற அமைப்பில் வந்துவிடும்.

$S' \neq 0$ என்பது $S^2 - 4\,RT > 0$ என்ற அடிப்படையில் பொருத்தமே என்பதை இப்பொழுது நிறுவ முயல்வோம்.

$$R'T' - S'^2 = R^2\,(u_x)^2\,(v_x)^2 + RS\,(u_x)^2\, v_x v_y + RT\,(u_x)^2\,(v_y)^2$$
$$+ RS\,(v_x)^2\, u_x u_y + S^2\, u_x u_y\, v_x v_y + ST\, u_x u_y\,(v_y)^2$$
$$+ RT\,(v_x)^2\,(u_y)^2 + ST\,(u_y)^2\, v_x v_y + T^2\,(u_y)^2\,(v_y)^2$$
$$-\{R^2\,(u_x)\,(v_x)^2 + \tfrac{1}{4}\, S^2\,(u_x v_y + v_x u_y)^2 + T^2\,(u_y)^2\,(v_y)^2$$
$$+ RS\, u_x v_x\,(v_x u_y + v_y u_x) + 2\, RT\, u_x v_x\, u_y v_y$$
$$+ ST\, u_y v_y\,(v_x u_y + v_y u_x)\}$$

$$= RT\{(u_x)^2(v_y)^2+(v_x)^2(u_y)^2-2\,u_xv_x\,u_yv_y\}$$
$$-\tfrac{1}{4}S^2\{(u_x)^2(v_y)^2+(v_x)^2(u_y)^2\}+u_xu_y\,v_xv_y\,(S^2-\tfrac{1}{2}S^2)$$
$$= RT\,(u_xv_y-v_xu_y)^2-\frac{S^2}{4}(u_xv_y-v_xu_y)^2$$
$$= \left(RT-\frac{S^2}{4}\right)(u_xv_y-v_xu_y)^2$$
$$=\tfrac{1}{4}(4RT-S^2)\,(u_xv_y-v_xu_y)^2$$

$R' = T'=0$ ஆகும் பொழுது

$S'^2 = \frac{1}{4}(S^2-4RT)\,(u_xv_y-v_xu_y)^2$ எனவாகிறது.

$\therefore\quad S^2-4RT > 0$ ஆகும் பொழுது

$S'^2>0$ ஆகிறது என்பது நிறுவப்படுகிறது. எனவே $S'\neq 0$.

எனவே $u_x = \lambda_1\,u_y$

$v_x = \lambda_2\,v_y$

என்பதற்கொப்ப, u, v என்ற சார்புகளைக் கொண்டு (B) என்ற சமன்பாட்டினை மாற்றியமைத்தால், $S^2-4RT>0$, என்ற அடிப் படையில் $S'\neq 0$ ஆவதால்,

(F) எனப்பட்ட சமன்பாட்டை,

$$\frac{\delta^2 z}{\delta u\,\delta v} = \frac{-F(u,v,z,z_u,z_v)}{2S'}$$
$$= f(u,v,z,z_u,z_v)$$

என ஒரு சிறப்பான அமைப்பிற்குக் கொண்டுவரலாம்.

இது ஓர் 'ஒழுங்கு முறையான' (Canonical) அமைப்பு எனப் படும். இவ்வமைப்பு, $S^2-4RT>0$ ஆக இருப்பின் மட்டுமே வரும்.

[$S^2-4RT=0$ என்ற கட்டுப்பாட்டில் $R\alpha^2+S\alpha+T=0$ என்ற சமன்பாட்டிற்கு இரு சமத் தீர்வுகள் வரும் பொழுது, (F) என்ற சமன்பாட்டிற்கு மற்றோர் ஒழுங்கு முறையான அமைப்பும், $S^2-4RT<0$ என்ற கட்டுப்பாட்டில் $R\alpha^2+S\alpha+T=0$ என்ற சமன் பாட்டிற்கு இரு இணைச் சிக்கல் தீர்வுகள் வரும் பொழுது, (F) என்ற சமன்பாட்டிற்கு மற்றோர் ஒழுங்கு முறையான அமைப்பும் வரும். இவற்றைத் தொடர்ந்து காண்போம்.]

18·1·21. நடை முறையில் (A) என்ற அமைப்பிலுள்ள சமன் பாட்டினை, முன் கூறப்பட்ட ஒழுங்கு முறையான உருவத்திற்குக்

கொண்டுவர படிப்படியாக நாம் எப்படிச் செல்ல வேண்டுமென் பதை விளக்குவோம்.

$$Rr+Ss+Tt+Pp+Qq+Zz=U \qquad ...(A)$$

முதலில் $S^2-4RT > 0$ தானு எனச் சரி பார்த்துக் கொள்க.

பின்னர் $R\alpha^2+S\alpha+T=0$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வுகள் காண்க. அவை $\lambda_1(x, y)$, $\lambda_2(x, y)$ என வரும்.

பின்னர் $\dfrac{dy}{dx}+\lambda_1(x, y)=0$

$$\frac{dy}{dx}+\lambda_2(x, y)=0$$

என்ற சமன்பாடுகளின் தீர்வுகளை, முறையே

$u(x, y)=c_1$

$v(x, y)=c_2$ என்று கண்டு கொள்க.

நமக்கு மாற்றமைப்புக்கு உதவும் சார்புகள் $u(x, y)$, $v(x, y)$ எனப் பெற்று விட்டோம்.

u_x, u_y, u_{xy}, v_x, v_y, v_{xy}, u_{xx}, v_{xx}, u_{yy}, v_{yy}-யாவற்றையும் கண்டு கொள்க. பின்னர், $R'=0$, $T'=0$ என நமக்குத் தெரியுமாதலால், மாற்றமைப்புச் சமன்பாட்டினை, (E) என்ற அமைப்பில் கொண்டு வருக.

$2S'$, P', Q', V என்ற யாவற்றையும், (2), (4), (5), (6) என்ற தொடர்புகளின் உதவி கொண்டு பெறுக. இப்பொழுது சமன்பாடு

$$2S'Z_{uv}+F(u, v, z, z_u, z_v)=0 \qquad ...(F)$$

என்ற அமைப்பில் வரும்.

$F(u, v, z, z_u, z_v)$-ன் மதிப்பு (G) என்ற தொடர்பு கொண்டு பெறப்படும்.

இப்பொழுது ஒழுங்கு முறையான அமைப்பு,

$$\frac{\delta^2 z}{\delta u\,\delta v}=\frac{-F(u, v, z, z_u, z_v)}{2S'}$$

$$=\varphi(u, v, z, z_u, z_v)$$

எனப் பெறப்படும்.

பின்வரும் எடுத்துக் காட்டு, படிப்படியாக, இம் முறையினை விளக்கும்.

18–1·22. எடுத்துக்காட்டு 1 :

$$\frac{\delta^2 z}{\delta x^2} = x^2 \frac{\delta^2 z}{\delta y^2}$$

என்ற சமன்பாட்டை, மேற்கூறிய ஒழுங்கு முறையான அமைப்பில் கொண்டு வருக.

$r - x^2\, t = 0$

$\therefore\ R=1;\ S=0;\ T=-x^2;$ இங்கு $S^2-4RT = 4x^2 > 0$ எனப் பெறப்படுகிறது.

$\therefore\ R\alpha^2+S\alpha+T=0$ என்ற சமன்பாடு, $\alpha^2-x^2=0$ என வரும்.

$\therefore\ \alpha=\pm x$ என இரு, வேறுபட்ட தீர்வுகள் பெறுகிறோம்.

$\therefore$ புதுச் சார்புகளான u, v இரண்டும் $\dfrac{dy}{dx} + x = 0$;

$\dfrac{dy}{dx} - x = 0$ என்ற சமன்பாடுகளினின்றும் பெறப்படும்.

அவையாவன $y + \dfrac{x^2}{2} \equiv u\ (x, y)$

$$y - \frac{x^2}{2} \equiv v\ (x, y)$$

$u_y=1;\ u_x=x;\ u_{xx}=1;\ u_{yy}=0;\ u_{xy}=0$

$v_y=1;\ v_x=-x;\ v_{xx}=-1;\ v_{yy}=0;\ v_{xy}=0$

$$R' = R\ (u_x)^2+S\ (u_x)\ u_y+T\ (u_y)^2$$

$$= x^2+(-x^2)\ (1)=0$$

$$2S' = 2\left[\ Ru_xv_x + \frac{S}{2}\ (v_xu_y+u_xv_y)+T\ u_yv_y\ \right]$$

$$= 2\ [-x^2+0-x^2\ (1)\ (1)]$$

$$= 2\ (-2x^2)$$

$$= -4x^2$$

$$T' = R\,(v_x)^2 + S\,v_x v_y + T\,(v_y)^2$$
$$= 1\,(-x)^2 + 0 - x^2\,(1)$$
$$= x^2 - x^2$$
$$= 0$$

$R' = 0$ என்பதும் $T' = 0$ என்பதும் தேவையில்லை; சரி பார்த்துக் கொள்வதற்காகவே மதிப்பிடப்பட்டன.

$$P' = R\,u_{xx} + S\,u_{xy} + T\,u_{yy}$$
$$= 1\,(1) + 0 - x^2\,(0)$$
$$= 1$$

$$Q' = R\,v_{xx} + S\,v_{xy} + T\,v_{yy}$$
$$= 1\,(-1) + 0 - x^2\,(0)$$
$$= -1$$

எனவே $r - x^2 t = 0$ என்ற சமன்பாடு,

$$-4x^2 \frac{\delta^2 z}{\delta u\,\delta v} + \frac{\delta z}{\delta u} - \frac{\delta z}{\delta v} = 0$$ என மாறும்.

அதாவது

$$\frac{\delta^2 z}{\delta u\,\delta v} = \frac{1}{4x^2}\left(\frac{\delta z}{\delta u} - \frac{\delta z}{\delta v}\right)$$

$$= \frac{1}{4\,(u-v)}\left[\frac{\delta z}{\delta u} - \frac{\delta z}{\delta v}\right]$$

இதுவே நாம் வேண்டிய 'ஒழுங்கு முறையான' அமைப்பு.

எடுத்துக்காட்டு 2 :

$\dfrac{\delta^2 z}{\delta x^2} = \dfrac{\delta^2 z}{\delta y^2}$ என்ற சமன்பாட்டை 'ஒழுங்கு முறையான' அமைப்புக்குக் கொண்டு வருக.

இதை $r - t = 0$ என எழுதலாம்.

$\therefore \quad R = 1,\ S = 0,\ T = -1$

$$S^2 - 4RT = 4 > 0$$

எனவே இதன் 'ஒழுங்கு முறையான' அமைப்பு,

$\frac{\delta^2 z}{\delta u\, \delta v} = \varphi\, (u, v, z, z_u, z_v)$ என்ற உருவில் வரும். u, v காண்போம்.

அதற்கென $R\alpha^2+S\alpha+T=0$

அதாவது $\alpha^2-1=0$ என்ற சமன்பாடு பெறுகிறோம்.

$\therefore \quad \alpha = +1$, அல்லது -1.

எனவே புதுச் சார்புகளான, u, v இரண்டும்

$\frac{dy}{dx}+1=0$, $\frac{dy}{dx}-1=0$ என்ற சமன்பாடுகளிலிருந்து பெறப்படும்.

$u = y+x$

$v = y-x$ என்பவையாகும்.

$u_x=1;\ u_{xx}=0;\ u_{xy}=0;\ u_y=1;\ u_{yy}=0$

$v_x=-1;\ v_{xx}=0;\ v_{xy}=0;\ v_y=1;\ v_{yy}=0$

$$R'=0;\ 2S'=2\left[R\, u_x\, v_x+\frac{S}{2}\left(v_x\, u_y+u_x\, v_y\right)+T\, u_y\, v_y\right]$$

$$= 2\,[1\cdot 1\,(-1)+0-1\,(1)\,(1)]$$

$$= -4$$

$$T' = 0$$

$$P' = R\, u_{xx}+S\, u_{xy}+T\, u_{yy}$$

$$= 0$$

$$Q' = R\, v_{xx}+S\, v_{xy}+T\, v_{yy}$$

$$= 0$$

எனவே $r-t=0$ என்ற சமன்பாடு,

$$-4\frac{\delta^2 z}{\delta u\, \delta v}+0+0=0$$

$$\therefore \quad \frac{\delta^2 z}{\delta u\, \delta v} = 0$$

$$\therefore \quad \frac{\delta}{\delta u}\left(\frac{\delta z}{\delta v}\right) = 0$$

$$\therefore \quad \frac{\delta z}{\delta v} = \varphi(v)$$

$$\therefore \quad z = \int \varphi(v)\, dv + \phi(u)$$

$$= \varphi_1(v) + \phi\,(u)$$

$$= F_1\,(y-x) + F_2\,(y+x)$$

அல்லது $\frac{\delta z}{\delta u} = \varphi\,(u)$

$$\therefore \quad z = \int \varphi(u)\, du + \phi(v)$$

$$= \varphi_1\,(u) + \phi(v)$$

$$= F\,(y+x) + f\,(y-x)$$

18–1·3. அடுத்தபடியாக,

$S^2 - 4RT = 0$ என எடுத்துக் கொள்வோம். அப்பொழுது

$R\alpha^2 + S\alpha + T = 0$ என்ற சமன்பாட்டிற்குப் பெறப்படும் தீர்வுகள் இரண்டும் சமம்; அதை λ எனக் கொள்வோம்.

$$\frac{du}{dx} = \lambda\,\frac{du}{dy}$$

என்ற சமன்பாட்டிற்குரிய $u\ (x, y)$ தான் R'-ன் மதிப்பைப் பூச்சியமாக்கும். $[R' = R\,(u_x)^2 + Su_xu_y + T(u_y)^2]$

இந்த u ஐ, $\frac{dy}{dx} + \lambda\,(x, y) = 0$ என்ற சமன்பாட்டிலிருந்து பெறலாமென நாம் அறிவோம். (18·1)

இந்த வகையில் $u(x, y)$ என்ற புதுச் சார்பைப் பெற்றுவிட்டபின்பு, R' பூச்சியமாகி விடுகிறது;

$$R'\,T' - S'^2 = \tfrac{1}{4}\,(4RT - S^2)\,(u_xv_y - v_xu_y)^2$$

என்ற தொடர்பு $-S'^2 = 0$ என மாறிவிடுகிறது. ஏனெனில் $S^2 - 4RT = 0$ என நாம் முதலில் ஏற்றுக் கொண்டிருக்கிறோம்.

இப்பொழுது $V\ (x, y)$ என்பதை ஏதாவது ஒரு சார்பாக எடுத்துக் கொள்வோம். [ஏனெனில் $T' = 0$ என்னும் வகையில்

$v_x = \lambda v_y$ என எடுத்துக் கொண்டால், நமக்கு $\frac{dy}{dx} + \lambda\ (x, y) = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் வழியாக வரும் v, நாம் முன் கண்ட u ஆகவேதானிருக்கும். $R\alpha^2 + S\alpha + T = 0$ என்ற சமன்பாட்டிற்கு இரு சமத்தீர்வுகள் பெற்றதன் விளைவு தான் இது.]

$v\ (x,y)$ என்ற சார்பு, $u\ (x,y)$-ச் சார்ந்ததாய் இராத வண்ணம், v ஐ எடுக்க வேண்டும். எனவே, இப்பொழுது $R' = 0$, $T' \neq 0$, $S' = 0$. எனவே (F) என்ற சமன்பாடு $T' \frac{\delta^2 z}{\delta v^2} = F\ (u, v, z, z_x, z_y)$ என மாறும். T' ஆல் வகுத்தால்,

$\frac{\delta^2 z}{\delta v^2} = \varphi\ (u, v\ , z, z_x, z_y)$ எனப் பெறப்படும். இது இரண்டாவது 'ஒழுங்கு முறையான' அமைப்பு எனப்படும்.

பின்வரும் எடுத்துக் காட்டு இம்முறையினை விளக்கும்.

18-1·31. எடுத்துக்காட்டு 1 :

$\frac{\delta^2 z}{\delta x^2} + 2\frac{\delta^2 z}{\delta x\, \delta y} + \frac{\delta^2 z}{\delta y^2} = 0$ என்ற சமன்பாட்டினை இரண்டாவது 'ஒழுங்கு முறையான' அமைப்புக்கு மாற்றி, அதன் தீர்வு காண்க.

இங்கு $R = 1$, $S = 2$, $T = 1$

$\therefore\ R\alpha^2 - S\alpha + T = 0$ என்ற சமன்பாடு,

$\alpha^2 + 2\alpha + 1 = 0$ என வரும்.

$\therefore\ \alpha = -1, -1$

u காணப் பயன்படும் சமன்பாடு,

$$\frac{dy}{dx} - 1 = 0$$

$\therefore\ y - x = u$ எனப் பெறப்படும்.

இப்பொழுது $v = x + y$ எனக் கொள்வோம். கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டை மாற்றியமைக்க வேண்டும்.

$u_x = -1$; $u_{xx} = 0$; $u_{xy} = 0$; $u_y = 1$; $u_{yy} = 0$

$v_x = 1$; $v_{xx} = 0$; $v_{xy} = 0$; $v_y = 1$; $v_{yy} = 0$

$$\therefore \quad T' = R\,(v_x)^2 + Sv_xv_y + T(v_y)^2$$
$$= 1\,(1) + 2\,(1)\,(1) + 1\,(1)$$
$$= 4.$$

$\therefore$ கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடு $4\,\dfrac{\delta^2 z}{\delta v^2} = 0$ என வரும்.

$$\therefore \quad \frac{\delta^2 z}{\delta v^2} = 0$$

$$\frac{\delta z}{\delta v} = \varphi\,(u)$$

$$z = v\,\varphi\,(u) + \psi\,(u)$$
$$= (x+y)\,\varphi\,(y-x) + \psi\,(y-x)$$

என்பது தீர்வாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 2 :

$$y^2\,\frac{\delta^2 z}{\delta x^2} - 2xy\,\frac{\delta^2 z}{\delta x \delta y} + x^2\,\frac{\delta^2 z}{\delta y^2} = \frac{y^2}{x}\,\frac{\delta z}{\delta x} + \frac{x^2}{y}\,\frac{\delta z}{\delta y}$$

என்ற சமன்பாட்டை 'ஒழுங்கு முறையான' அமைப்புக்குக் கொண்டுவந்து, அதன் தீர்வு காண்க.

$$R = y^2; \quad S = -2xy\,; \quad T = x^2\,; \; P = \frac{-y^2}{x}\,; \; Q = \frac{-x^2}{y}$$

$R\alpha^2 + S\alpha + T = 0$ என்ற சமன்பாடு

$y^2\alpha^2 - 2xy\alpha + x^2 = 0$ என வரும்.

இதன் தீர்வுகள் $\alpha = \dfrac{x}{y}$

$\therefore$ u காண நாம் ஏற்கும் சமன்பாடு, $\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{x}{y} = 0$

அதாவது $u = x^2 + y^2$ என ஏற்கலாம்.

இப்பொழுது $v = y^2 - x^2$ என ஏற்போம்.

$R' = 0\,; \quad S' = 0; \quad T'$–ன் மதிப்பு காண்போம்.

$$u_x = 2x\,; \quad u_{xx} = 2\,; \quad u_{xy} = 0\,; \quad u_y = 2y\,; \quad u_{yy} = 2$$

$$v_x = -2x\,; \quad v_{xx} = -2\,; \quad v_{xy} = 0\,; \quad v_y = 2y\,; \quad v_{yy} = 2$$

$$T' = R\,(v_x)^2 + S\,(v_x v_y) + T\,(v_y)^2$$
$$= y^2\,(-2x)^2 - 2xy\,(-4xy) + x^2\,(2y)^2$$
$$= 16\,x^2y^2$$
$$= 4\,[\,(x^2+y^2)^2 - (y^2-x^2)^2\,]$$
$$= 4\,(u^2-v^2)$$

$$P' = R\,u_{xx} + Su_{xy} + Tu_{yy} + Pu_x + Qu_y$$
$$= y^2(2) - 2xy\,(0) + x^2\,(2) - \frac{y^2}{x}\,(2x) - \frac{x^2}{y}\,(2y)$$
$$= 2y^2 + 2x^2 - 2y^2 - 2x^2$$
$$= 0$$

$$Q' = R\,v_{xx} + Sv_{xy} + T\,v_{yy} + Pv_x + Qv_y$$
$$= y^2\,(-2) - 2xy\,(0) + x^2\,(2) - \frac{y^2}{x}\,(-2x)\,\frac{-x^2}{y}\,(2y)$$
$$= -2y^2 + 2x^2 + 2y^2 - 2x^2$$
$$= 0$$

எனவே கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டின் மாற்றமைப்பு,

$T'\,\dfrac{\delta^2 z}{\delta v^2} = 0$ என வரும் ; $T' \neq 0$

$$\therefore\quad \frac{\delta^2 z}{\delta v^2} = 0$$

$$\therefore\quad \frac{\delta z}{\delta v} = \varphi\,(u)$$

$$\therefore\quad z = v\varphi(u) + \phi\,(u)$$
$$= (y^2-x^2)\,\varphi\,(x^2+y^2) + \phi\,(x^2+y^2)$$

இதுவே சமன்பாட்டின் தீர்வாகும்.

18·1·4. மூன்றாவதாக,

$S^2 - 4RT < 0$ என எடுத்துக்கொள்வோம். அப்பொழுது $R\alpha^2+S\sigma+T=0$ என்ற சமன்பாட்டிற்குப் பெறப்படும் தீர்வுகள், $\lambda_1+i\lambda_2$, $\lambda_1-i\lambda_2$ எனவிருக்கும்.

$$\frac{\delta u}{\delta x} = (\lambda_1 + i\lambda_2)\frac{\delta u}{\delta y}$$

$$\frac{\delta v}{\delta x} = (\lambda_1 - i\lambda_2)\frac{\delta v}{\delta y}$$

என்ற சமன்பாடுகளுக்குரிய $u(x_y\, y)$-ம், $v(x, y)$-ம் தாம் R'-ன் மதிப்பையும், T'-ன் மதிப்பையும் பூச்சியமாக்கும். ஆனால் u-ம், v-ம், இணைச் சிக்கல் சார்புகளாகும். (complex conjugates) u என்பது $\frac{dy}{dx} + (\lambda_1 + i\,\lambda_2) = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வு வழியாகவும், v என்பது $\frac{dy}{dx} + (\lambda_1 - i\lambda_2) = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வு வழியாகவும் பெறப்படும்.

எனவே $\xi = \frac{1}{2}(u+v)$

$$\eta = \frac{1}{2}\, i\,(u-v)$$

என்ற மாற்றமைப்பு கொண்டு, 'கனானிகல்' அமைப்பைப் பெறுவோம். அப்பொழுது

$$\frac{\delta z}{\delta u} = \frac{\delta z}{\delta \xi}\frac{\delta \xi}{\delta u} + \frac{\delta z}{\delta \eta}\frac{\delta \eta}{\delta u}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\delta z}{\delta \xi} + \frac{i}{2}\frac{\delta z}{\delta \eta}$$

$$\frac{\delta^2 z}{\delta u\, \delta v} = \frac{\delta}{\delta v}\frac{1}{2}\left[\frac{\delta z}{\delta \xi} + i\frac{\delta z}{\delta \eta}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\delta}{\delta \xi}\left(\frac{\delta z}{\delta \xi}\right)\frac{\delta \xi}{\delta v} + \frac{\delta}{\delta \eta}\left(i\,\frac{\delta z}{\delta \eta}\right)\frac{\delta \eta}{\delta v}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\frac{\delta^2 z}{\delta \xi^2} + i\frac{\delta^2 z}{\delta \eta^2}\left(-\frac{1}{2}\,i\right)\right]$$

$$\frac{1}{4}\left[\frac{\delta^2 z}{\delta \xi^2} + \frac{\delta^2 z}{\delta \eta^2}\right]$$

எனவே மாற்றியமைக்கப்படும் சமன்பாடு,

$$\frac{\delta^2 z}{\delta \xi^2} + \frac{\delta^2 z}{\delta \eta^2} = \phi\,(\xi, \eta, z, z_\xi, z_\eta)$$

என்றவாறு வரும்.

இது மூன்ருவது 'ஒழுங்கு முறையான' அமைப்பு.

பின்வரும் எடுத்துக் காட்டு, இம்முறையை விளக்கும்.

18-1·41. எடுத்துக்காட்டு :

$\frac{\delta^2 z}{\delta x^2}+x^2\frac{\delta^2 z}{\delta y^2}=0$ என்ற சமன்பாட்டிஃன மூன்ருவது 'ஒழுங்கு முறையான' அமைப்புக்குக் கொண்டு வருக.

$R=1$: $S=0$; $T=x^2$; $P=0$, $Q=0$; $U=0$

$\therefore$ $R\alpha^2+S\alpha+T=0$ என்ற சமன்பாடு

$\alpha^2+x^2=0$ என வரும்.

$\therefore$ $\alpha=\pm\, ix$

எனவே u, v காண,

$$\frac{dy}{dx}+ix=0$$

$$\frac{dy}{dx}-ix=0$$

என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வுகஃளக் காண வேண்டும்.

$$\therefore\quad u=y+i\,\frac{x^2}{2}$$

$$v=y-i\,\frac{x^2}{2}$$ என வரும்.

எனவே $\xi=\frac{1}{2}(u+v)=y$

$$\eta=\frac{1}{2}\,i\,(u-v)=\frac{1}{2}\,iix^2$$
$$=-\frac{1}{2}\,x^2$$

முதலில், சமன்பாட்டை u, v-க்கு மாற்றியமைத்தால் பெறப் படும் சமன்பாடு யாதெனக் காண்போம். $R'=0$, $T'=0$,

$$2\,S'=2\cdot 1\;\frac{\delta u}{\delta x}\,\frac{\delta v}{\delta x}+0\,(\ldots\ldots)+2x^2\,\frac{\delta u}{\delta y}\,\frac{\delta v}{\delta y}$$
$$=2\,i\,x\,(-ix)+2x^2\,(1)\,(1)$$
$$=4x^2$$

$$P' = 1 \ \frac{\delta^2 u}{\delta x^2} + 0 + x^2 \ \frac{\delta^2 u}{\delta y^2}$$

$$= 1 \ i + x^2 \ (0)$$

$$= i$$

$$Q' = 1 \frac{\delta^2 v}{\delta x^2} + 0 + x^2 \ \frac{\delta^2 v}{\delta y^2}$$

$$= 1 \ (-i) + 0 + x^2 \ (0)$$

$$= -i$$

எனவே கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடு,

$4x^2 \frac{\delta^2 z}{\delta u \ \delta v} + i \left(\frac{\delta z}{\delta u} - \frac{\delta z}{\delta v} \right) = 0$ என மாற்றமைப்பைப் பெறும். ஏற்கெனவே இப்பத்தியின் துவக்கத்தில்,

$$\frac{\delta^2 z}{\delta u \ \delta v} = \frac{1}{4} \left(\frac{\delta^2 z}{\delta \xi^2} + \frac{\delta^2 z}{\delta \eta^2} \right)$$

என நிறுவியிருக்கிறோம். இப்பொழுது

$$\frac{\delta z}{\delta u} = \frac{\delta z}{\delta \xi} \ \frac{\delta \xi}{\delta u} + \frac{\delta z}{\delta \eta} \ \frac{\delta \eta}{\delta u}$$

$$= \frac{1}{2} \ \frac{\delta z}{\delta \xi} + \frac{\delta z}{\delta \eta} \ \frac{1}{2} \ i$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{\delta z}{\delta \xi} + i \frac{\delta z}{\delta \eta} \right)$$

$$\frac{\delta z}{\delta v} = \frac{\delta z}{\delta \xi} \ \frac{\delta \xi}{\delta v} + \frac{\delta z}{\delta \eta} \ \frac{\delta \eta}{\delta v}$$

$$= \frac{1}{2} \ \frac{\delta z}{\delta \xi} + \frac{\delta z}{\delta \eta} \left(-\frac{1}{2} i \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{\delta z}{\delta \xi} - i \frac{\delta z}{\delta \eta} \right)$$

$$\therefore \quad i\left(\frac{\delta z}{\delta u} - \frac{\delta z}{\delta v}\right) = \frac{i}{2}\left[\frac{\delta z}{\delta \xi} + i\,\frac{\delta z}{\delta \eta} - \frac{\delta z}{\delta \xi} + i\,\frac{\delta z}{\delta \eta}\right]$$

$$= i^2\,\frac{\delta z}{\delta \eta}$$

$$= -\frac{\delta z}{\delta \eta}$$

$\therefore \quad \xi,\ \eta$ — என்ற மாற்றம் பெற்ற சமன்பாடு,

$$4x^2 .\ \frac{1}{4}\left(\frac{\delta^2 z}{\delta \xi^2} + \frac{\delta^2 z}{\delta \eta^2}\right) - \frac{\delta z}{\delta \eta} = 0$$

ஆனால் $x^2 = -2\eta$

$$\therefore \quad -8\eta \,.\, \frac{1}{4}\left(\frac{\delta^2 z}{\delta \xi^2} + \frac{\delta^2 z}{\delta \eta^2}\right) - \frac{\delta z}{\delta \eta} = 0$$

அதாவது $\dfrac{\delta^2 z}{\delta \xi^2} + \dfrac{\delta^2 z}{\delta \eta^2} = -\dfrac{1}{2\eta}\,\dfrac{\delta z}{\delta \eta}$

என்ற மூன்றாவது 'ஒழுங்கு முறை' மாற்றமைப்பில் வரும்.

18-2. இதுவரை நாம் ஆய்ந்த முறையில்

$$Rr + Ss + Tt + Pp + Qq + Zz = U$$

அல்லது

$$Rr + Ss + Tt + f\,(x, y, z, p, q) = 0$$

என்ற அமைப்பிலுள்ள இரண்டாம் வரிசைச் சமன்பாட்டினை, மூன்று வகைகளாகப் பிரிக்கலாம் :

(*a*) $S^2 - 4RT > 0$ ஆனால் அதி பரவளையப் பிரிவு (Hyperbolic) எனவும்,

(*b*) $S^2 - 4RT = 0$ ஆனால் பரவளையப் பிரிவு (Parabolic) எனவும்,

(*c*) $S^2 - 4RT < 0$ ஆனால் நீள் வட்டப் பிரிவு (Elliptic) எனவும் கூறுவது மரபு.

(i) $\dfrac{\delta^2 z}{\delta x^2} = \dfrac{\delta^2 z}{\delta y^2}$ என்ற 'அலைச்' சமன்பாடு (one-dimension

wave equation), (a) பிரிவைச் சேரும் ; ஏனெனில் $R=1$, $T=-1$ $S=0$ ஆக $S^2-4RT=0-4(1)(-1) = 4>0$

இதன் 'ஒழுங்கு முறை' அமைப்பு,

$$\frac{\delta^2 z}{\delta u\ \delta v} = 0$$ என்று வரும்.

$u=y+x$; $v=y-x$ என ஈடு செய்ய வேண்டும்.

(ii) $\frac{\delta^2 z}{\delta x^2} = \frac{\delta z}{\delta y}$ என்ற 'பரவல்' சமன்பாடு (one dimensional diffusion equation), (b) பிரிவைச் சேரும் ; ஏனெனில் $R=1$, $S=0$, $T=0$ ஆக $S^2-4RT=0$

இது 'ஒழுங்கு முறை' அமைப்பிலேயே இருக்கிறது.

(iii) $\frac{\delta^2 z}{\delta x^2} + \frac{\delta^2 z}{\delta y^2} = 0$

என்ற இசைச் சமன்பாடு (Two-dimensional harnomic equation), மூன்றுவது பிரிவான (c) பிரிவைச் சேரும் ; ஏனெனில் $R=1$, $T=1$, $S=0$ ஆக $S^2-4RT=-4 < 0$. இது 'ஒழுங்கு முறை' அமைப்பிலேயேயிருக்கிறது.

பயிற்சி 18

(1) $(n-1)^2 \frac{\delta^2 z}{\delta x^2} - y^{2n}\frac{\delta^2 z}{\delta y^2} = ny^{2n-1}\frac{\delta z}{\delta y}$

என்ற சமன்பாட்டினை, 'கனுனிகல்' அமைப்பிற்குக் கொண்டு வந்து, தீர்வு காண்க.

(2) $y^2 r - x^2 t = 0$ என்ற சமன்பாட்டை, 'கனுனிகல்' அமைப்பிற்குக் கொண்டு வருக.

(3) $u(x^i, t) = t^{-N/2}\, e^{\frac{-\Sigma (x^i)^2}{4t}}$

என்பது,

$$\frac{\delta u}{\delta t} = \frac{\delta^2 u}{(\delta x^1)^2} + \ldots \ldots + \frac{\delta^2 u}{(\delta x N)^2}$$

என்ற பரவலைய சமன்பாட்டிற்கு ஒரு தீர்வாகுமென நிறுவுக. (செ.ப.க.)

விடை 18

(1) கனுனிகல் அமைப்பு : $\frac{\delta^2 z}{\delta u\, \delta v} = 0$

$$u = x - \frac{1}{y^{n-1}}$$

$$v = x + \frac{1}{y^{n-1}}$$

தீர்வு $z = \varphi\left(x + \frac{1}{y^{n-1}}\right) + \phi\left(x - \frac{1}{y^{n-1}}\right)$

(2) $\frac{\delta^2 z}{\delta u\, \delta v} = \frac{1}{2(u^2 - v^2)}\left[v\frac{\delta z}{\delta u} - u\frac{\delta z}{\delta v}\right]$

$u = x^2 + y^2$;

$v = x^2 - y^2$.

19. தொகை மாற்றங்கள்–இலாப்ளாஸ் மாற்றங்கள்

(Integral Transforms–Laplace Transforms)

19-1. முன்னுரை : (a, b) என்ற இடைவெளியில் $f(x)$ என்ற சார்பின் தொகை மாற்றம் $\overline{f}(p)$ என்பது,

$$\overline{f}(p) = \int_a^b f(x)\, K(p, x)\, dx \qquad \ldots(A)$$

என வரையறுக்கப்படுகிறது.

$K(p, x)$ என்பது p, x இரண்டையும் சார்ந்த ஒரு தெரிந்த சார்பு ; இது இம் மாற்றத்தின் கருமூலம் (kernel) எனப்படும். [(A) என்ற தொகை மதிப்பு காண முடியும் என்று ஏற்றுக் கொள்ளப்படுகிறது.]

இவ்வாறான மாற்றங்கள் கொண்டு, சாதாரண வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகளின் தீர்வுகளையும் பகுதி வகைக் கெழுச் சமன்பாடுகளின் தீர்வுகளையும் காணலாம். இது ஒரு நவீன முறையாகும்.

19-1·1 இலாப்ளாஸ் மாற்றம் (Laplace Transform) : வரையறை

$K(p, x) = e^{-px}$ என்ற மதிப்பேற்று, தொகை காண எல்லைகள் 0 முதல் ∞ வரை (பூச்சியம் முதல் கந்தழி வரை) இருக்குமாயின், அது ஒரு தனிச் சிறப்பான மாற்றமாகும்.

அப்பொழுது $\bar{f}(p) = \int_0^\infty e^{-px} f(x)\, dx$ என்பது $f(x)$-ன் இலாப்ளாஸ் மாற்றமெனப்படும். இதை $\llcorner (p)$ என்று குறியீடு செய்யும் மரபும் உள்ளது.

மேலும் $\int_0^\infty e^{-px} f(x)\, dx$ என்ற தொகை காணின் இது ஒரு p ஐப் பொருத்த சார்பாக இருப்பதால் இதை $\bar{f}(p)$ அல்லது $\llcorner (p)$ எனக் குறியிடுகிறோம். இது பெரும்பாலான இடங்களில் பயன் படுத்தப்படுகிற ஒரு மாற்றமாகும். சிறப்பாக, குறிப்பிட்ட முதனிலைக் கட்டுப்பாடுகள் (Initial conditions) கொடுக்கப்பட்டிருக்கும்பொழுது இம்மாற்றமானது சாதாரண வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகளின் தீர்வு காணப் பயன்படுகிறது. மற்ற மாற்றங்கள், கணிதம் சார் இயல்பியலில் (mathematical physics) பல வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகளின் தீர்வு காணப் பயன்படுகின்றன.

இவ்விதப் பயன்பாட்டு முறைகளைக் கையாளும் திறமையை நாம் பெற்றால், நாம் முன் பகுதிகளில் கூறப்பட்ட தீர்வு காணும் முறைகளை விட, எளிதில், நேரடியாகப் பல வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகளின் தீர்வு காணலாம். முன் பகுதிகளில் விளக்கப்பட்ட முறைகளைக் கையாண்டு பயன் பெற, மிகுந்த அனுபவமும், நுண்ணறிவாற்றலும் தேவை. இவ்விதத் தொகைமாற்ற முறைகளைக் கையாள, செய்முறைப் பயிற்சி மட்டுமேயிருந்தால் போதுமானது.

19-2. இலாப்ளாஸ் மாற்றம் : விளக்கம்

முன்னர் கூறியுள்ளபடி,

$$\llcorner (p) = \bar{f}(p) = \int_0^\infty e^{-px} f(x)\, dx$$

என்பது $f(x)$ என்ற சார்பின் இலாப்ளாஸ் மாற்றம். சில பல திட்ட அமைப்பில் உள்ள சார்புகளுக்கு நாம் எளிதில் இம்மாற்றம் கண்டு மனப்பாடம் செய்து கொள்ளலாம். p என்பது எப்பொழுதும் கூட்டெண் (>0) என ஏற்கப்படுகிறது.

(1) $f(x) \equiv 1$ எனில்,

$$\bar{f}(p) = \int_0^\infty e^{-px}\, dx$$

$$= -\frac{1}{p}\left(e^{-px} \right)_0^\infty$$

$$= \frac{1}{p}$$

(2) $f(x) = x$ எனில்,

$$\bar{f}(p) = \int_0^\infty x\, e^{-px}\, dx$$

$$= \left(\frac{-x e^{-px}}{p}\right)_0^\infty - \left(\frac{e^{-px}}{p^2}\right)_0^\infty$$

$$= \frac{1}{p^2}$$

ஏனெனில், எல்லை $\underset{x \to 0}{} \dfrac{x e^{-px}}{p}$

$$= \underset{x \to 0}{\text{எல்லை}} \frac{x}{p\, e^{px}} = 0$$

(3) $f(x) = x^n$ (n கூட்டு முழு எண்) எனில்

$$\bar{f}(p) = \int_0^\infty x^n\, e^{-px}\, dx$$

$$= \left[\frac{-x^n\, e^{-px}}{p}\right]_0^\infty + \frac{n}{p}\int_0^\infty x^{n-1}\, e^{-px}\, dx$$

$$u_n = \int_0^\infty x^n e^{-px}\, dx$$ எனக் கொண்டால்

$u_n = \frac{n}{p} u_{n-1}$ என்ற சுருக்க வாய்பாடு (Reduction formula) கிட்டும். இதைப் போலவே

$$u_{n-1} = \frac{n-1}{p} u_{n-2}$$

$$u_2 = \frac{1}{p} u_1$$

$$= \frac{1}{p} \cdot \frac{1}{p^2} \left\{ \text{(2) ஐப் பயன்படுத்த} \right\}$$

$$\therefore u_n = \frac{\angle n}{p^{n+1}}$$

$$\therefore \bar{f}(p) = \frac{\angle n}{p^{n+1}}$$

குறிப்பு 1 பொதுவாக $n > -1$ ஆனல்,

$$\bar{f}(p) = \int_0^\infty x^n e^{-px}\, dx = \frac{\Gamma(n+1)}{p^{n+1}}$$

$\alpha > 0$ ஆனல், $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty e^{-x} x^{\alpha-1}\, dx$ என்பது Γ என்ற ஒரு சார்பாகும். இதைக் காமா (Gamma) சார்பு எனப் படிப்பது மரபு.

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-x}\, dx = 1$$ என அறியலாம்.

மேலும் $\Gamma(\alpha+1) = \int_0^\infty e^{-x} x^{\alpha}\, dx$

$$= \left[-e^{-x} x^{\alpha} \right]_0^{\infty} + \alpha \int_0^{\infty} e^{-x} x^{\alpha-1} dx$$

$$= \alpha\Gamma(\alpha)$$

α ஒரு முழு எண்ணுயின்,

$$\Gamma(n+1) = n\,\Gamma(n)$$
$$= n(n-1)\,\Gamma(n-1) = \ldots \quad \ldots \quad \ldots$$
$$= \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots$$
$$= n(n-1)(n-2) \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad 2\Gamma(1)$$
$$= \angle n$$

மற்றும் காமா சார்பைப் பற்றி விரிவாக ஏனைய தொகை நுண் கணித நூல்களில் காணலாம்.

(4) $f(x) = e^{ax} f(x)$ எனக் கொள்வோம் ; a மாறிலி.

$$\overline{f}(p) = \int_0^{\infty} e^{(a-p)x} f(x)\, dx$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-(p-a)x} f(x)\, dx \qquad (p>a)$$

எனவே $f(x)$-ன் இலாப்ளாஸ் மாற்றம் $\overline{f}(p)$ எனக் கொண்டால், $e^{ax} f(x)$-ன் இலாப்ளாஸ் மாற்றம் $\overline{f}(p-a)$ எனப் பெறலாமென்பதைக் காண்க. இதை ஆதி மாற்றத் தேற்றம் (Shifting Theorem) எனக் கூறுவது மரபு.

எனவே $f(x) \equiv e^{ax}$ ஆனுல்,

$$\int_0^{\infty} e^{ax} e^{-px} = dx \frac{1}{p-a}$$ எனவும்,

$f(x) = x^n$ (n – கூட்டு முழு எண்) ஆனுல்

$$\int_0^{\infty} x^n e^{ax} e^{-px} dx = \frac{\angle n}{(p-a)^{n+1}}$$ எனவும் பெறலாம்.

குறிப்பு : இம் முடிவுகளை, நேரடியாகவே,

$$\int_0^\infty e^{-(p-a)x}\,dx = \frac{1}{p-a} \text{ எனவும்,}$$

$$\int_0^\infty x^n e^{-(p-a)x}\,dx = \frac{\angle n}{(p-a)^{n+1}} \text{ எனவும்}$$

வரையறுத்த தொகை காணும் முறைகளில் காணலாம்.

(5) $f(x) = e^{ax}\cos bx$ எனவிருப்பின்

$$\overline{f}(p) = \int_0^\infty e^{-(p-a)x}\cos bx\,dx = A \text{ எனக் கொள்க.}$$

$f(x) = e^{ax}\sin bx$ எனவிருப்பின்,

$$\overline{f}(p) = \int_0^\infty e^{-(p-a)x}\sin bx\,dx = B \text{ எனக் கொள்க.}$$

அப்பொழுது,

$$A+i\,B = \int_0^\infty e^{-(p-a)x} e^{ibx}\,dx$$

$$= \int_0^\infty e^{-(p-\overline{a+ib})x}\,dx$$

$$= \frac{1}{p-(a+ib)}$$

$$= \frac{(p-a)+ib}{(p-a)^2+b^2}$$

$$= \frac{p-a}{(p-a)^2+b^2} + i\,\frac{b}{(p-a)^2+b^2}$$

மெய்ப் பகுதி, கற்பனைப் பகுதி இரண்டையும் பிரித்தெழுத,

$$A = \int_0^\infty e^{-(p-a)x} \cos bx \, dx = \frac{p-a}{(p-a)^2+b^2}$$

$$B = \int_0^\infty e^{-(p-a)x} \sin bx \, dx = \frac{b}{(p-a)^2+b^2}$$

எனவே A என்பது $e^{ax} \cos bx$-ன் இலாப்ளாஸ் மாற்றம் ; B என்பது $e^{ax} \sin bx$-ன் இலாப்ளாஸ் மாற்றம்.

மேலும் $a=0$ எனக் கொண்டால்

$$\cos bx\text{-ன் இலாப்ளாஸ் மாற்றம்} = \frac{p}{p^2+b^2}$$

$$\sin bx\text{-ன் இலாப்ளாஸ் மாற்றம்} = \frac{b}{p^2+b^2}$$

என்ற உண்மைகளும் பெறப்படும்.

(6) $f(x) = \sinh ax$ எனக் கொள்வோம். அப்பொழுது

$$\bar{f}(p) = \int_0^\infty \frac{e^{ax} - e^{-ax}}{2} e^{-px} dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^\infty \left[e^{-(p-a)x} - e^{-(p+a)x} \right] dx$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-a} - \frac{1}{p+a} \right)$$

$$= \frac{a}{p^2-a^2}$$

(7) $f(x) = \cosh ax$ எனக் கொள்வோம்.

அப்பொழுது,

$$\bar{f}(p) = \int_0^\infty \frac{e^{ax} + e^{-ax}}{2} e^{-px} dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\infty} \left\{ e^{-(p-a)x} + e^{-(p+a)x} \right\} dx$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{p-a} + \frac{1}{p+a} \right)$$

$$= \frac{p}{p^2-a^2}$$

(8) $f(x) = \frac{x}{2a} \sin ax$; $F(x) = \frac{x}{2a} \cos ax$ எனவும் கொள்வோம்.

$f(x) = \frac{x}{2a} \sin ax$ எனக் கொண்டால்,

$\bar{f}(p) = \frac{1}{2a}\int_0 e^{-px} x \sin ax \, dx = B$ எனக் கொள்க.

$F(x) = \frac{x}{2a} \cos ax$ எனக் கொண்டால்

$\bar{F}(p) = \frac{1}{2a}\int_0^{\infty} e^{-px} x \cos ax \, dx = A$ எனக் கொள்க.

அப்பொழுது

$$A+iB = \frac{1}{2a}\int_0^{\infty} e^{-px} x \, e^{iax} \, dx$$

$$= \frac{1}{2a}\int_0^{\infty} e^{-(p-ia)x} . x \, dx$$

$$= \frac{1}{2a}\left[\frac{e^{-(p-ia)x} . x}{-(p-ia)} \right]_0^{\infty}$$

$$- \frac{1}{2a} \int_0^{\infty} \frac{e^{-(p-ia)x}}{-(p-ia)} . 1 . dx$$

முதற்பகுதி பூச்சியமாகும்.

$$\therefore \quad A+iB = \frac{1}{2a(p-ia)} \int_0^{\infty} e^{-(p-ia)x}\, dx$$

$$= \frac{1}{2a(p-ia)} \left[\frac{e^{-(p-ia)x}}{-(p-ia)} \right]_0^{\infty}$$

$$= \frac{1}{2a(p-ia)^2}$$

$$= \frac{1}{2a} \frac{(p^2-a^2)+2ipa}{[(p^2-a^2)-2ipa]\ [(p^2-a^2)+2ipa]}$$

$$= \frac{1}{2a} \frac{(p^2-a^2)+2ipa}{(p^2-a^2)^2+4p^2a^2}$$

$$= \frac{1}{2a} \frac{(p^2-a^2)+2i\,pa}{(p^2+a^2)^2}$$

மெய்யெண் பகுதி, கற்பனைப் பகுதிகளை ஒப்பிட்டுப் பார்த்தால்,

$$\therefore \quad A = \frac{1}{2a} \cdot \frac{p^2-a^2}{(p^2+a^2)^2} \text{ எனவும்,}$$

$$B = \frac{p}{(p^2+a^2)^2} \quad \text{எனவும் பெறப்படும்.}$$

$$\therefore \quad f(x) = \frac{x}{2a} \sin ax \text{ ஆனால்}$$

$$\bar{f}(p) = \frac{p}{(p^2+a^2)^2}$$

$$F(x) = \frac{x}{2a} \cos ax \text{ ஆனால்}$$

$$\bar{F}(p) = \frac{1}{2a} \frac{p^2-a^2}{(p^2+a^2)^2}\,.$$

எனவே $x \cos ax$-க்கு, இலாப்ளாஸ் மாற்றம் $\frac{p^2-a^2}{(p^2+a^2)^2}$ எனப் பெறப்படுகிறது.

19-2·1. $f(x)$-ன் இலாப்ளாஸ் மாற்றம் $\overline{f}(p)$ என எழுதுவத்ற்குப் பதிலாக $\llcorner [f(x)]$ எனவும் குறியீடு செய்தெழுதுவது மரபாகும் என முதலில் கூறினேம். இக் குறியீட்டின்படி, பின் வரும் இலாப்ளாஸ் மாற்றப் பட்டியல், இதுவரை நாம் கண்ட உண்மைகளைத் தொகுத்துக் கூறும். p எப்பொழுதும் > 0 என்பது முன் கூறியபடி ஏற்கப்படுகிறது.

	$f(x)$	$\llcorner f(x)$-அதாவது $f(x)$-ன் $\overline{f}(p)$	கட்டுப்பாடுகள் எவையேனுமிருப்பின்
1.	1	$\frac{1}{p}$	
2.	x	$1/p^2$	
3.	x^n	$\angle n/p^{n+1}$	n கூட்டு முழு எண்
4.	x^n	$\Gamma(n+1)/p^{n+1}$	$n > -1$
5.	e^{ax}	$\frac{1}{p-a}$	a ஒரு மாறிலி, $p>a$
6.	$x^n e^{ax}$	$\frac{\angle n}{(p-a)^{n+1}}$	n—கூட்டு முழு எண், $p>a$
7.	$x^n e^{ax}$	$\frac{\Gamma(n+1)}{(p-a)^{n+1}}$	$n>-1$, a மாறிலி $p>a$
8.	$\cos bx$	$\frac{p}{p^2+b^2}$	b—மாறிலி
9.	$\sin bx$	$\frac{b}{p^2+b^2}$	b—மாறிலி
10.	$e^{ax} \cos bx$	$\frac{(p-a)}{(p-a)^2+b^2}$	a, b—மாறிலிகள்
11.	$e^{ax} \sin bx$	$\frac{b}{(p-a)^2+b^2}$	a, b—மாறிலிகள்

12.	$\cosh ax$	$\frac{p}{p^2-a^2}$	a—மாறிலி
13.	$\sinh ax$	$\frac{a}{p^2-a^8}$	a—மாறிலி
14.	$x \cos ax$	$\frac{p^2-a^2}{(p^2+a^2)^2}$	a—மாறிலி
15.	$\frac{x}{2a} \sin ax$	$\frac{p}{(p^2+a)^2}$	a—மாறிலி

இந்த வாய்பாடுகள் மனப்பாடமாக இருக்க வேண்டியது இன்றியமையாதது.

19-2·2. இலாப்ளாஸ் மாற்றங்களின் சில பண்புகள்

தேற்றம் 1 : இரு சார்புகளின் கூட்டலின் இலாப்ளாஸ் மாற்றம் அச்சார்புகளின் தனித்தனி இலாப்ளாஸ் மாற்றங்களின் கூட்டுத் தொகைக்குச் சமமாகும்.

அதாவது, $L\left[\{f_1(x)+f_2(x)\}\right]$

$$= L\left[f_1(x)\right] + L\left[f_2(x)\right]$$

தெரிப்பு : வரையறைப்படி,

$$L\left[\{f_1(x)+f_2(x)\}\right] = \int_0^\infty e^{-px}\{f_1(x)+f_2(x)\}\,dx$$

$$= \int_0^\infty \left[e^{-px}\{f_1(x)\} + e^{-px}\{f_2(x)\}\right] dx$$

$$= \int_0^\infty e^{px-} f_1(x)\,dx + \int_0^\infty e^{-px} f_2(x)\,dx$$

$$= L\left[\{f_1(x)\}\right] + L\left[\{f_2(x)\}\right]$$ (வரையறைப்படி)

தேற்றம் 2 :

c ஒரு மாறிலி எனில்,

$$L\left[\{c\,f(x)\}\right] = c\,L\left[\ \{f(x)\}\ \right]$$

தெரிப்பு : வரையறைப்படி,

$$L\left[\{c\,f(x)\}\right] = \int_0^{\infty} e^{-px}\{c\,f(x)\}\,dx$$

$$= c\int_0^{\infty} e^{-px}f(x)\,dx \text{ (தொகையின் பண்பு)}$$

$$= c\ \ L\left[\{\,f(x)\}\,\right] \text{ (வரையறைப்படி)}$$

குறிப்பு : தேற்றம் (1), (2) இரண்டையும் பயன்படுத்தி c_1, c_2 என்ற எந்த இரு மாறிலிகளுக்கும்,

$$L\left[\{\,c_1 f_1(x)+c_2\,f_2(x)\}\,\right] = c_1\ \ L\left[\{\,f_1(x)\}\right] + c_2\ \ L\left[\{\,f_2(x)\,\}\right] \text{ என நிறுவலாம்.}$$

இத்தகைய தேற்றம் பல சார்புகளின் கூட்டல்களின் இலாப்ளாஸ் மாற்றங்களை எளிதில் காணப் பயன்படும்.

மாற்றத்தின் வகைக்கெழுவும் தொகையும்

தேற்றம் 3 :

$$L\left[\{\,f(x)\,\}\right] = \varphi(p) \text{ எனில், } L\left[\{\,x f(x)\}\right] = -\varphi'(p)$$

என்பது தேற்றம்.

தெரிப்பு : $\varphi(p) = L\ \{\,f(x)\} = \int_0^{\infty} e^{-px}\,f(x)\,dx$

இரு புறமும் p ஐப் பொருத்து வகைக்கெழு காண

$$\varphi'(p) = \int_0^\infty f(x)\{-x\, e^{-px}\}\, dx$$

$$= -\int_0^\infty (e^{-px})\{x f(x)\}\, dx$$

$$= -\ L\left[\ \{x f(x)\}\ \right]$$ என நிறுவப்படுகிறது.

குறிப்பு: இதைப் போலவே

$$\varphi''(p) = (-1)^2\ L\left[\ \{x^2 f(x)\}\ \right]$$ எனவும்,

பொதுவாக $\varphi^n(p) = (-1)^n\ L\left[\ \{x^n f(x)\}\ \right]$ எனவும் நிறுவ லாம்.

தேற்றம் 4 : $L\left[\ \{f(x)\}\ \right] = \varphi(p)$ எனில்,

$$L\left[\ \left\{\frac{f(x)}{x}\right\}\ \right] = \int_p^\infty \varphi(p)\, dp$$ என்பது தேற்றம்.

தெரிப்பு:

$$\varphi(p) = L\left[\ \{f(x)\}\ \right] = \int_0^\infty e^{-px} f(x)\, dx$$

இரு புறமும் p ஐப் பொருத்துத் தொகை காண

$$\int_p^\infty \varphi(p)\, dp = \int_p^\infty \left[\int_0^\infty e^{-px} f(x)\, dx\right] dp$$

$$= \int_0^\infty f(x) \left[\int_p^\infty e^{-px} . dp \right] dx$$

(ஏனெனில் p என்பது x ஐப் பொருத்ததல்ல)

$$= \int_0^\infty f(x) \left[\frac{e^{-px}}{-x} \right]_p^\infty dx = \int_0^\infty \left\{ \frac{f(x)}{x} \right\} e^{-px}\, dx$$

$$= L \left[\frac{f(x)}{x} \right]$$

19·2·3. எடுத்துக்காட்டு 1 :

(1) $L(a+bx+cx^2)$-ன் மதிப்பறிக.

$$L(a+bx+cx^2) = \frac{a}{p} + \frac{b}{p^2} + \frac{c\, 2!}{p^3}$$

$$= \frac{a}{p} + \frac{b}{p^2} + \frac{2c}{p^3}$$

தேற்றம் (1), (2), 19-2·1, வாய்பாடுகள் (1), (2), (3) பயன் படுத்தப்பட்டன.

எடுத்துக்காட்டு 2 :

$L(x^2 e^{3x})$-ன் மதிப்பறிக.

19-2·1 வாய்பாடு (6) பயன்படுத்தினால்

$$L(x^2 e^{3x}) = \frac{2!}{(p-3)^3}$$

தேற்றம் 3-ன்படி $L\left[(x^2 e^{3x})\right] = \frac{d^2}{dp^2}\left(\frac{1}{p-3}\right) = \frac{2!}{(p-3)^3}$

எனவும் பெறலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 3 :

$L\left[\frac{1}{2a^2} \sin ax - \frac{x}{2a} \cos ax\right]$-ன் மதிப்பறிக.

19–2·1 வாய்பாடு (9)-ன்படி,

$$L\left[\left(\frac{1}{2a^2}\sin ax\right)\right]=\frac{1}{2a^2}\;\frac{a}{p^2+a^2}$$

வாய்பாடு (14)-ன்படி

$$L\left[\left(\frac{x}{2a}\cos ax\right)\right]=\frac{1}{2a}\frac{p^2-a^2}{(p^2+a^2)^2}$$

$$\therefore \text{ வேண்டிய விடை }=\frac{1}{2a}\left[\frac{1}{p^2+a^2}-\frac{p^2-a^2}{(p^2+a^2)^2}\right]$$

(தேற்றம் 1, 2-லிருந்து)

$$=\frac{1}{2a}\left[\frac{p^2+a^2-p^2+a^2}{(p^2+a^2)^2}\right]$$

$$=\frac{a}{(p^2+a^2)^2}$$

எனவே $\frac{1}{2a^3}(\sin ax-ax\cos ax)$-ன் இலாப்ளாஸ்

$$\text{மாற்றம் }=\frac{1}{(p^2+a^2)^2}$$

எடுத்துக்காட்டு 4 :

$L\left[(x^2\cos 2x)\right]$ன்-மதிப்பு என்ன ?

(தேற்றம் 3—பயன்படுத்துக.)

$$L\left[(\cos 2x)\right]=\frac{p}{p^2+4}$$

எனவே

$$L\left[(x^2\cos 2x)\right]=(-1)^2\frac{d^2}{dp^2}\left(\frac{p}{p^2+4}\right)$$

$$=\frac{d}{dp}\left[\frac{p^2+4-2p^2}{(p^2+4)^2}\right]$$

$$= \frac{d}{dp}\left[\frac{4-p^2}{(p^2+4)^2}\right]$$

$$= \frac{(p^2+4)^2\,(-2p)-(4-p^2)\,2\,(p^2+4)\,2p}{(p^2+4)^4}$$

$$= 2\,p\,\frac{(p^2-12)}{(p^2+4)^3}$$

எடுத்துக்காட்டு 5 :

$L\left[\left(\frac{1-e^x}{x}\right)\right]$-ன் மதிப்பு என்ன ?

(தேற்றம் 4—பயன்படுத்துக)

$$L\left[(1-e^x)\right] = L\left[(1)\right] - L\left[(e^x)\right]$$

$$= \frac{1}{p} - \frac{1}{p-1}$$

எனவே

$$L\left[\left(\frac{1-e^x}{x}\right)\right]$$

$$= \int_p^{\infty}\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p-1}\right)dp$$

$$= \left[\log\frac{p}{p-1}\right]_p^{\infty}$$

$$= \log\left(\frac{p-1}{p}\right)$$

எடுத்துக்காட்டு 6 :

தேற்றம் 3 ஐப் பயன்படுத்தி $L\left[(x^n)\right]$-ன் மதிப்பறிக.

$$L\left[(1)\right] = \frac{1}{p}$$

$$\therefore \frac{d^n}{dp^n}\left(\frac{1}{p}\right) = (-1)^n L\{x^n.1\}$$

$$\therefore \frac{(-1)^n \angle n}{p^{n+1}} = (-1)^n L\{x^n\}$$

$$\therefore L\left[(x)^n\right] = \frac{\angle n}{p^{n+1}}$$

எடுத்துக்காட்டு 7 :

இலெகுவேர் பல்லுறுப்புக் கோவை (Leguerre polynomial) என்பது,

$$L_n(x) = e^x \frac{d^n}{dx^n}(x^n e^{-x})$$ என வரையறுக்கப்படுகிறது.

$$L\left[L_n(x)\right] = \frac{\angle n}{p}\left(\frac{p-1}{p}\right)^n$$ என நிறுவுக.

$$L_n(x) = e^x\left[(-1)^n e^{-x} x^n + {}_nC_1 (-1)^{n-1} e^{-x}. nx^{n-1}\right.$$
$$+ {}_nC_2 (-1)^{n-2} e^{-x} n(n-1) x^{n-2} + \ldots\ldots\ldots$$
$$\left.+ \ldots\ldots\ldots\ldots + e^{-x}\angle n\right]$$

$$= (-1)^n\left[x^n - {}_nC_1 n\, x^{n-1} + {}_nC_2\, n(n-1)\, x^{n-2} \ldots\ldots\right.$$
$$\left.\ldots \ldots (-1)^n \angle n\right]$$

$$\therefore \quad L\left[L_n(x)\right] = (-1)^n\left[\frac{\angle n}{p^{n+1}} - n.\, {}_nC_1 \frac{\angle n-1}{p^n}\right.$$
$$\left.+ n(n-1)\, {}_nC_2 \frac{\angle n-2}{p^{n-1}} + \ldots + (-1^n)\frac{\angle n}{p}\right]$$

$$= \frac{(-1)^n \angle n}{p^{n+1}}\left[-1^n C_1 p + {}_nC_2 p^2 \ldots (-1^n) p^n\right]$$

$$= \frac{(-1)^n \angle n}{p^{n+1}}(1-p)^n = \frac{\angle n}{p}\left(\frac{p-1}{p}\right)^n$$

எடுத்துக்காட்டு 8 :

$f(x) = \sin x \ (0<x<\pi)$

$f(x) = 0 \qquad (x > \pi)$

என்ற கட்டுப்பாட்டில் $L[f(x)]$ காண்க.

$$L\left[f(x)\right] = \int_0^{\infty} e^{-px} \sin x \, dx$$

$$= \underset{\epsilon\to 0}{\text{எல்லை}} \int_0^{\pi-\epsilon} e^{-px} \sin x \, dx + \int_{\pi-\epsilon}^{\pi+\epsilon} + \int_{\pi+\epsilon}^{\infty} 0 \, dx$$

$$= I_1 + I_2 + I_3$$

$\epsilon\to 0$ ஆகும்பொழுது $I_2=0$ என்ற எல்லையை நெருங்கும். I_3 பூச்சியமாகிவிடும். எனவே,

$$L\left[f(x)\right] = \underset{\epsilon\to 0}{\text{எல்லை}} - \left[\frac{e^{-px}(\cos x + p\sin x)}{1+p^2}\right]_0^{\pi-\epsilon}$$

$$= -\left[\frac{e^{-p\pi}(-1)-(1)}{1+p^2}\right]$$

$$= \frac{1+e^{-p\pi}}{1+p^2}$$

எடுத்துக்காட்டு 9 :

$f(x)=0 \qquad (0 < x < a)$

$f(x)=1 \qquad (a < x < b)$

$f(x)=0 \qquad (x > b)$

என்ற கட்டுப்பாட்டில் $L[f(x)]$ காண்க.

$$L\left[f(x)\right] = \int_0^{\infty} e^{-px} f(x) \, dx$$

$$= \underset{\substack{\epsilon \to 0 \\ \epsilon_1 \to 0}}{\text{எல்லை}} \left[\int_0^{a-\epsilon} + \int_{a-\epsilon}^{a+\epsilon} + \int_{a+\epsilon}^{b-\epsilon_1} + \int_{b-\epsilon_1}^{b+\epsilon_1} + \int_{b+\epsilon_1}^{\infty} \right]$$

$$= 0 + \underset{\substack{\epsilon \to 0 \\ \epsilon_1 \to 0}}{\text{எல்லை}} \left[\int_{a-\epsilon}^{a+\epsilon} + \int_{a+\epsilon}^{b-\epsilon_1} \right] + 0$$

$$= 0+0+ \int_{a+\epsilon}^{b-\epsilon_1} 1.e^{-px}\, dx$$

$$= \left(\frac{e^{-pa} - e^{-pb}}{p} \right) \text{ என வரும்.}$$

எடுத்துக்காட்டு 10 :

திரும்புச் சார்பின் (Periodic function) இலாப்ளாஸ் மாற்றம் காணும் முறை

வரையறை : $f(x)$ என்ற சார்பின் கால வட்டம் 'a' என்றால் $f(x+a) = f(x)$ என்பது பொருள்.

தேற்றம் : $f(x)$-ன் கால வட்டம் 'a' எனில்

$f(x+ra) = f(x)$ என்பது உண்மை.

தெரிப்பு : இங்கு r ஒரு முழு எண்.

r கூட்டு முழு எண் : $f(x+2a) = f(\overline{x+a}+a)$

$= f(x+a)$ [இங்கு $x+a$ மாறியாகும்.]

$= f(x)$

பொதுவாக $f(x+ra) = f(x)+\overline{r-1}\, a+a)$

$= f(x+\overline{r-1}\, a)$ (இங்கு $x+\overline{r-1}\, a$ மாறியாகும்.)

$= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$= f(x+a)$

$= f(x)$

r ஒரு குறை முழு எண் :

$$f(x+a) = f(x-a+2a)$$
$$= f(\overline{x-a}+a) \quad (x-a \text{ மாறியாகும்})$$
$$= f(x-a).$$

மேலும் $f(x+a) = f(x)$ ஆதலால்

$f(x-a) = f(x)$ என்றாகும்.

இதைப்போல் பொதுவாக

$f(x-ra) = f(x)$ என நிறுவலாம்.

$f(x)$ என்பது ஒரு திரும்புச் சார்பு என்றும், இதன் கால வட்டம் a என்றும் கொண்டு

$$L\left[f(x)\right] = \frac{\int_0^a e^{-px} f(x)\, dx}{1-e^{-ap}}$$ என நிறுவுக.

தெரிப்பு :

$$L[f(x)] = \int_0^\infty f(x)\, e^{-px}\, dx$$

$$= \int_0^a e^{-px} f(x)\, dx + \int_a^{2a} e^{-px} f(x)\, dx$$

$$+ \int_{2a}^{3a} e^{-px} f(x)\, dx + \dots \dots$$

முதலில் $\int_a^{2a} e^{-px} f(x)\, dx$ ஐ எடுத்துக் கொள்வோம். இதில்

$x = y + a$ என ஈடு செய்தால்

$dx = dy$ என்றும்

$$\int_a^{2a} e^{-px} f(x)\, dx = \int_0^a e^{-p(y+a)} f(y+a)\, dy$$

$$= \int_0^a e^{-pa} e^{-py} f(y)\, dy$$ [ஏனெனில் $f(y+a) = f(y)$; கால வட்ட வரையறை]

$$= e^{-pa} \int_0^a e^{-px} f(x)\, dx$$

என்றாகும். பொதுவாக

$$\int_{(r-1)a}^{ra} f(x)\, e^{-px}\, dx$$ —லும்

$x = y + \overline{r-1}\, a$ என ஈடு செய்தால்

$dx = dy$ என்றும்,

$$\int_{(r-1)a}^{ra} f(x)\, e^{-px}\, dx = \int_0^a e^{-p\,(y+\overline{r-1}a)} f(y+\overline{r-1}a)\, dy$$

$$= e^{-p(r-1)\,a} \int_0^a e^{-py} f(y)\, dy$$

$$= e^{-p\,(r-1)\,a} \int_0^a e^{-px} f(x)\, dx$$ என்றும்

ஆகும். எனவே,

$$L[f(x)] = \int_0^a e^{-px} f(x)\, dx + e^{-pa} \int_0^a e^{-px} f(x)\, dx$$

$$+ e^{-2pa} \int_0^a e^{-px} f(x)\, dx + \dots \dots \dots$$

$$\int_0^a e^{-px} f(x)\, dx \{ 1+e^{-pa}+e^{-2pa}+e^{-3pa}+\ldots\ldots\}$$

என நிறுவப்படுகிறது. மேலும்,

$p>0$, என்பதாலும் $a>0$ என்பதாலும்

$$-pa<0$$

எனவே $e^{-pa} > e^0 = 1$ எனக் கிட்டும்.

ஆகவே

$1+e^{-pa}+e^{-2pa}+\ldots\ldots = \dfrac{1}{1-e^{-pa}}$ (பெருக்குத் தொடரின் கந்தழிக் கூட்டல்)

$$\therefore L\Big[\ f(x)\ \Big] = \frac{\int_0^a e^{-px} f(x)\, dx}{1-e^{-pa}}$$ எனப் பெறப்படும்.

பயிற்சி 19·1

பின்வரும் சார்புகளின் இலாப்ளாஸ் மாற்றங்கள் காண்க.

(1) x^2+x+1

(2) e^x-e^{-x}

(3) $\cosh ax-\sinh bx$

(4) $\cos ax \cos bx$

(5) $\sin ax \cos bx$

(6) $\sin ax \sin bx$

(7) $\cos (ax+b)$

(8) $e^{3x} (2 \sin 2x-3 \cos 2x)$

(9) $e^{-ax} x^n$ (n—கூட்டு முழு எண்)
(தேற்றம் 3 ஐப் பயன்படுத்திச் சரி பார்க்கவும்)

(10) $F(p) = \int_0^\infty e^{-px} f(x)\, dx$ ஆனால்

$$\int_0^\infty e^{-px}\left[e^{-ax} f(x)\right] dx = F(p+a)$$ என நிறுவுக.

(11) $\cos^2 3x$

(12) $\cos^3 3x$

(13) $\sin^2 t$ (x-க்குப் பதில் t கொடுக்கப்படுகிறது.)

(14) $x \sin ax$

(15) $\dfrac{\sin ax}{x}$

(16) $\dfrac{1-\cos x}{x^2}$

(17) $x \cosh ax$

(18) $\dfrac{1-e^{-ax}}{x}$

(19) $\sum_{n=0}^{N} a_n x^n$

(20) $x^2 e^{-3x}$

விடை 19·1

(1) $\dfrac{2}{p^3} + \dfrac{1}{p^2} + \dfrac{1}{p}$

(2) $\dfrac{2}{p^2-1}$

(3) $\dfrac{p}{p^2-a^2} - \dfrac{b}{p^3-b^2}$

(4) $\dfrac{p}{2}\left[\dfrac{1}{p^2+(a+b)^2} + \dfrac{1}{p^2+(a-b)^2}\right]$

(5) $\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{a+b}{p^2+(a+b)^2} + \dfrac{a-b}{p^2+(a-b)^2}\right]$

(6) $\dfrac{p}{2}\left[\dfrac{1}{p^2+(a-b)^2} - \dfrac{1}{p^2+(a+b)^2}\right]$

(7) $\dfrac{p\cos b - a\sin b}{p^2+a^2}$

(8) $\dfrac{-(3p-13)}{p^2-6p+13}$

(9) $\dfrac{\angle n}{(p+a)^{n+1}}$

(11) $\dfrac{p^2+18}{p\,(p^2+36)}$

(12) $\dfrac{p\,(p^2+63)}{(p^2+81)\;(p^2+9)}$

(13) $\dfrac{2}{p\,(p^2+4)}$

(14) $\dfrac{2ap}{(p^2+a^2)^2}$

(15) $\cot^{-1}\left(\dfrac{p}{a}\right)$

(16) $\cot^{-1}p - \frac{1}{2}\,p\log\left(1+\dfrac{1}{p^2}\right)$

(17) $\dfrac{p^2+a^2}{(p^2-a^2)^2}$

(18) $\log \frac{(p+a)}{p}$

(19) $\sum_{n=0}^{N} \left[\frac{\lfloor n \; a_n}{p^{n+1}} \right]$

(20) $\frac{2}{(p+3)^8}$

19-3. இலாப்ளாஸ் பிரதி மாற்றம் (Inverse Laplace Transform)

இலாப்ளாஸ் மாற்றங்களை நாம் பயன்படுத்துங்கால், ஒரு குறிப்பிட்ட இலாப்ளாஸ் மாற்றமுடைய முதற் சார்பைக் காண வேண்டிய சந்தர்ப்பங்கள் ஏற்படும். அதாவது $\bar{f}(p) = L[f(x)]$ ஆனுல், $\bar{f}(p)$ கொடுக்கப்பட்டால், அதை இலாப்ளாஸ் மாற்றமாகப் பெற்ற $f(x)$ஐ அறிய வேண்டியிருக்கும். $\bar{f}(p) = F(p)$ என ஏற்போமாயின், $F(p)$-ன் இலாப்ளாஸ் பிரதி மாற்றம் $f(x)$ என வரையறுக்கப்படுகிறது.

எழுதும் முறை : $f(x) = L^{-1}[F(p)]$

$= L^{-1}[\bar{f}(p)]$

ஒரு மரபுப்படி, $f(x) \leftrightarrow F(p)$ எனவும் எழுதலாம்.

எனவே $\int_0^\infty e^{-px} f(x)\, dx = F(p)$ என்னும் சமன்பாடு கொடுக்கப்பட்டு, $f(x)$ காண்பதே நமது நோக்கமாகும்.

$f(x)$ என்பது நாம் காண வேண்டிய சார்பாதலினுலும், அது தொகைக் குறியீடான $\int$-ல் தோன்றுவதாலும், மேற்கூறிய சமன்பாட்டை ஒரு தொகைச் சமன்பாடு (Integral equation) எனவும் கூறுவது மரபு.

இச் சமன்பாட்டிற்கு ஒரு தீர்வு இருக்குமாயின், அது தனிச் சிறப்பு வாய்ந்தது (unique solution) என்று நிறுவக் கூடும். இத் தேற்றம் இலெர்ச் (Lerch) தேற்றம் எனப்படும். நிறுவன்முறை இங்கு தரப்படவில்லை.

நேர் முகமான இலாப்ளாஸ் பிரதி மாற்றங்கள் காணும் முறை இந்நூலில் இடம் பெறு. ஆனல் இலாப்ளாஸ் மாற்றப் பட்டியல் களைக் கொண்டு, பிரதி மாற்ற முடிவுகளை நாம் காண்போம்.

19-3·1 : பட்டியல் 19·21-ன் உதவியுடன் பின்வரும் பிரதி மாற்றப் பட்டியல் பின்னர் கொடுக்கப்பட்டிருக்கிறது.

இலாப்ளாஸ் பிரதி மாற்றப் பட்டியல் :

$F(p) = \bar{f}(p)$	பிரதி மாற்றம் $f(x) = L^{-1}[F(p)]$
(1) $\frac{1}{p}$	$L^{-1}\left(\frac{1}{p}\right) = 1$
(2) $\frac{1}{p^2}$	$L^{-1}\left(\frac{1}{p^2}\right) = x$
(3) $\frac{1}{p^n}$	$L^{-1}\left(\frac{1}{p^n}\right) = \frac{x^{n-1}}{\underline{\angle n-1}}$
(4) $\frac{1}{p-a}$	$L^{-1}\left(\frac{1}{p-a}\right) = e^{ax}$
(5) $\frac{1}{p+a}$	$L^{-1}\left(\frac{1}{p+a}\right) = e^{-ax}$
(6) $\frac{1}{p^2+a^2}$	$L^{-1}\left(\frac{1}{p^2+a^2}\right) = \frac{1}{a}\sin ax$
(7) $\frac{p}{p^2+a^2}$	$L^{-1}\left(\frac{p}{p^2+a^2}\right) = \cos ax$
(8) $\frac{1}{p^2-a^2}$	$L^{-1}\left(\frac{1}{p^2-a^2}\right) = \frac{1}{a}\sinh ax$
(9) $\frac{p}{p^2-a^2}$	$L^{-1}\left(\frac{p}{p^2-a^2}\right) = \cosh ax$

19-3·2. எடுத்துக்காட்டு 1 :

$$L^{-1}\left(\frac{3!}{p^4}\right) = x^3$$

எடுத்துக்காட்டு 2 :

$$L^{-1}\left(\frac{1}{p^5}\right)=\frac{1}{\lfloor 4}\;L^{-1}\left(\frac{\lfloor 4}{p^5}\right)=\frac{1}{\lfloor 4}\;x^4$$

எடுத்துக்காட்டு 3 :

$$L^{-1}\left(\frac{1}{p+2}\right)=L^{-1}\left(\frac{1}{p-(-2)}\right)=e^{-2x}$$

எடுத்துக்காட்டு 4 :

$$L^{+1}\left(\frac{1}{p^2+p-6}\right)=L^{-1}\left[\frac{1}{5}\left(\frac{1}{p-2}-\frac{1}{p+3}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{5}\left(e^{2x}-e^{-3x}\right)$$

எடுத்துக்காட்டு 5 :

$$L^{-1}\left(\frac{p+6}{p^2-9}\right)=L^{-1}\left(\frac{p}{p^2-3^2}\right)+2\,L^{-1}\left(\frac{3}{p^2-3^2}\right)$$

$$=\cosh 3x+2\sinh 3x$$

எடுத்துக்காட்டு 6 :

$$L^{-1}\left(\frac{25}{p\,(p^2+25)}\right)=L^{-1}\left(\frac{1}{p}-\frac{p}{p^2+25}\right)$$

$$=1-\cos 5x$$

எடுத்துக்காட்டு 7 :

$$L^{-1}\left(\frac{24}{p^2\,(p^2+1)\,(p^2+4)}\right)=L^{-1}\left(\frac{6}{p^2}-\frac{8}{p^2+1}+\frac{2}{p^2+2^2}\right)$$

$$=6x-8\sin x+\cos 2x$$

எடுத்துக்காட்டு 8 :

$$L^{-1}\left(\frac{\angle n}{(p+2)^{n+1}}\right)=e^{-2x}\,x^n$$

[19-2·1. வாய்பாடு (6) காண்க.]

எடுத்துக்காட்டு 9 :

$L^{-1}\left(\frac{p}{(p+a)^2}\right)$ காண்க.

$$\frac{p}{(p+a)^2} = \frac{A}{(p+a)^2} + \frac{B}{p+a}$$

$$= \frac{A+B\,(p+a)}{(p+a)^2}$$

$\therefore\ B=1;\ A+Ba=0 \qquad \therefore A=-a$

$$\therefore\ L^{-1}\left[\frac{p}{(p+a)^2}\right] = L^{-1}\left[\frac{1}{p+a} - \frac{a}{(p+a)^2}\right]$$

$$= e^{-ax} - xa\,e^{-ax}$$

$$= e^{-ax}\,(1-ax)$$

எடுத்துக்காட்டு 10 :

$L^{-1}\left[\frac{16}{(p^2+9)\ (p^2+25)}\right]$ காண்க.

$$\frac{16}{(p^2+9)\ (p^2+25)} = \frac{1}{p^2+9} - \frac{1}{p^2+25}$$

$$L^{-1}\left(\frac{1}{p^2+9} - \frac{1}{p^2+25}\right) = L^{-1}\left(\frac{1}{3}\ \frac{3}{p^2+3^2}\right)$$

$$-L^{-1}\left(\frac{1}{5}\ \frac{5}{p^2+5^2}\right)$$

$$= \frac{1}{3}\sin 3x - \frac{1}{5}\sin 5x$$

எடுத்துக்காட்டு 11 :

$L^{-1}\left\{\frac{1}{(p+a)}\right\}$ -ன் மதிப்பைக் காண்க.

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{(p+a)^5}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{1}{[p-(-a)]^5}\right\}$$

$$= e^{-ax}\,L^{-1}\left\{\frac{1}{p^5}\right\}$$

$$= e^{-ax} L^{-1} \left\{ \frac{4\,!}{p^5\, 4\,!} \right\}$$

$$= \frac{e^{-ax}}{24} \left[L^{-1} \left\{ \frac{4\,!}{p^5} \right\} \right.$$

$$= \frac{e^{-ax}}{24} x^4$$

எடுத்துக்காட்டு 12 :

$L^{-1} \left\{ \frac{p-3}{p^2+4p+13} \right\}$-ன் மதிப்பைக் காண்க.

$$\frac{p-3}{p^2+4p+13} = \frac{p-3}{(p+2)^2+9}$$

$$= \frac{(p+2)-5}{(p+2)^2+9}$$

எனவே p ஐ $(p-2)$-க்கு மாற்ற

$$L^{-1} \left\{ \frac{p-3}{p^2+4p+13} \right\} = e^{-2x} L^{-1} \left\{ \frac{p-5}{p^2+9} \right\}$$

$$= e^{-2x} L^{-1} \left\{ \frac{p}{p^2+3^2} - \frac{5}{p^2+9} \right\}$$

$$= e^{-2x} \left[L^{-1} \left\{ \frac{p}{p^2+3^2} \right\} - \frac{5}{3} L^{-1} \left(\frac{3}{p^2+9} \right) \right]$$

$$= e^{-2x} \left\{ \cos 3x - \frac{5}{3} \sin 3x \right\}$$

எடுத்துக்காட்டு 13 :

$L^{-1} \left\{ \frac{cp+d}{(p+a)^2 + b^2} \right\}$-ன் மதிப்பைக் காண்க.

$$\frac{cp+d}{(p+a)^2 + b^2} = \frac{c\,(p+a) + d - ca}{(p+a)^2 + b^2}$$

$$\therefore \quad L^{-1} \left\{ \frac{cp+d}{(p+a)^2+b^2} \right\} = L^{-1} \left\{ \frac{c(p+a)}{(p+a)^2+b^2} + \frac{d-ca}{(p+a)^2 + b^2} \right\}$$

$$= c\, e^{-ax} L^{-1} \left\{ \frac{p}{p+b^2} \right\}$$

$$+ \frac{d-ca}{b} e^{-ax} \left\{ \frac{b}{p^2+b^2} \right\}$$

$$= c\, e^{-ax} \cos bx + \frac{d-ca}{b} e^{-ax} \sin bx$$

$$= e^{-ax} \left\{ c \cos bx + \frac{d-ca}{b} \sin\ bx \right\}$$

எடுத்துக்காட்டு 14 :

$L \left[(y) \right] = \log \dfrac{p+a}{p+b}$ எனில் y மதிப்பு என்ன?

$L \left[(y) \right] = \varphi(p)$ எனக் கொள்க.

எனவே $\dfrac{d}{dp} \varphi\,(p) = - L \left[(xy) \right]$ (19-2·2 தேற்றம் 3)

$$\frac{d}{dp} \varphi\,(p) = \frac{d}{dp} \left[\log \frac{p+a}{p+b} \right]$$

$$= \frac{1}{p+a} - \frac{1}{p+b}$$

எனவே $L \left[(xy) \right] = \dfrac{1}{p+b} - \dfrac{1}{p+a}$

$$\therefore \quad xy = L^{-1} \left[\frac{1}{p+b} - \frac{1}{p+a} \right]$$

$$= e^{-bx} - e^{-ax}$$

$$y = \frac{e^{-bx} - e^{-ax}}{x}$$

குறிப்பு : இதையொட்டி, உடன் தொடரும் பயிற்சி 19·2-ல் 16, 17 கணக்குகளைச் செய்யலாம்.

பயிற்சி 19·2

பின்வரும் சார்புகளுக்கு இலாப்ளாஸ் பிரதி மாற்றம் காண்க.

(1) $\dfrac{24}{p^5}$

(2) $\dfrac{1}{2p-5}$

(3) $\dfrac{1}{p^2-p-6}$

(4) $\dfrac{36}{p(p^2+36)}$

(5) $\dfrac{1}{p^2+3p-4}$

(6) $\dfrac{1}{(p+3)^2}$

(7) $\dfrac{p}{(p+1)(p+2)}$

(8) $\dfrac{1}{(p-a)^2-b^2}$

(9) $\dfrac{2p+6}{(p^2+8p+17)^2}$

(10) $\dfrac{a^2}{p(p^2+a^2)}$

(11) $\dfrac{cp+d}{(p+a)^2-b^2}$

(12) $\dfrac{p+7}{p^2+2p+5}$

(13) $\dfrac{p+2}{(p+2)^2+9}$

(14) $\frac{1}{(p+2)^7}$

(15) $\frac{p}{(p+2)^2}$

(16) $\log \frac{1+p}{p}$

(17) $\log \frac{p^2-1}{p^2}$

விடை 19·2

(1) x^4

(2) $\frac{1}{2} e^{5/2\, x}$

(3) $2 \cosh 5x+\sinh 5x$

(4) $1-\cos 6x$

(5) $\frac{1}{5}\left(e^x-e^{-4x}\right)$

(6) xe^{-3x}

(7) $2e^{-2x}-e^{-x}$

(8) $\frac{1}{b} e^{ax} \sinh bx.$

(9) $e^{-4x} (x \cos x+x \sin x-\sin x)$

(10) $1-\cos ax$

(11) $c \frac{e^{-ax}}{b}\{ b \cosh bx + \frac{d}{c} \sinh bx-a \sinh bx\}$

(12) $e^{-x} \{\cos 2x+3 \sin 2x\}$

(13) $e^{-2x} \cos 3x$

(14) $\dfrac{e^{-2x}\, x^6}{6\,!}$

(15) $e^{-x}\,(1-2x)$

(16) $\dfrac{1-e^{-x}}{x}$

(17) $\dfrac{2-e^{x}-e^{-x}}{x}$

19-4. வகைக்கெழுக்களின் இலாப்ளாஸ் மாற்றங்கள்

சாதாரண ஒரு படிக்குரிய சமன்பாடுகளின் தீர்வு காண, நமக்கு $f\,(x)$-ன் வகைக்கெழுக்களது இலாப்ளாஸ் மாற்றங்களும் தேவைப்படுமாதலின், அவற்றின் மாற்றங்களேயும் காண்போம்.

அதாவது

$$\int_0^{\infty} e^{-px}\, \frac{df}{dx} dx\ ;\ \int_0^{\infty} e^{-px}\, \frac{d^2f}{dx^2}\, dx, \ \ldots\ldots\ldots \int_0^{8} e^{-px}\, \frac{d^nf}{dx^n}\, dx$$

என்பவற்றையும் முதனிலைக் கட்டுப்பாடுகளோடு காண வேண்டும்.

$$(i)\ \int_0^{\infty} e^{-px}\, \frac{df}{dx}\ dx\ =\ \Big[\, f\,(x)\ e^{-px}\,\Big]_0^{\infty} + p \int_0^{\infty} e^{-px}\, f\,(x)\, dx$$

$$= -\, f\,(0) + p\ L\ [f\,(x)]$$

என வரும்.

[பின் வரும் விளக்கம் பெறுக.

சாதாரணமாக எல்லா இயல்பியல் கணக்குகளிலும் எல்லை
$x \to \infty\ f\,(x)\ e^{-px}$ பூச்சியமாகும் ; மேலும் $x=0$ ஆகும் பொழுது

$f(x)$-ன் மதிப்பு $f(0)$ எனக் கொள்ளலாம்; இது முதனிலைக் கட்டுப்பாடு என ஏற்கப்படலாம். எனவே

$$[f(x)\, e^{-px}]_0^{\infty} = 0 - f(0)]$$

(ii) $$\int_0^{\infty} e^{-px} \frac{d^2f}{dx^2}\,dx = \left[e^{-px} \frac{df}{dx}\right]_0^{\infty} + p\int_0^{\infty} e^{-px}\frac{df}{dx} = 0$$

$$= -f'(0) + p\,[-f(0) + p\,L f(x)\,]$$
$$= -f'(0) - p\,f(0) + p^2 L\,[f(x)]$$

இங்கு $f'(0)$ என்பது மரபுப்படி $x=0$ ஆகும் பொழுது $\frac{df}{dx}$ -ன் மதிப்பாகும்.

$$\lim_{x\to\infty} e^{-px}\frac{df}{dx} = \text{பூச்சியமெனவும் ஏற்கப்படுகிறது.}$$

(iii) இவ்வாருகத் தொடர்ந்து செல்வோமாயின்

$$\int_0^{\infty} e^{-px}\frac{d^nf}{dx^n}\,dx = -f^{(n-1)}(0) - p\,f^{(n-2)}(0)$$
$$- p^2 f^{(n-3)}(0)\ldots\ldots\ldots$$
$$- p^{n-1} f(0)$$
$$+ p^n L\,[f(x)] \text{ என நிறுவலாம்.} \qquad \ldots(B)$$

இந்த வாய்பாடு மூலம், நாம் $f(x)$-ன் வகைக்கெழுக்களின் இலாப்ளாஸ் மாற்றங்களை, $L f(x)$ உடன் தொடர்புபடுத்துகிறோம்; முதனிலை மதிப்புகள் பயன்படுத்தப்படுகின்றன என்பதைக் காண்க. இந்த வாய்பாட்டுடன் 19-2·1-ல் நாம் பெற்ற வாய்பாடுகளைக் கொண்டு நாம் ஒரு படிக்குரிய சாதாரண சமன்பாடுகளின் தீர்வு காணலாம்.

19-5. இலாப்ளாஸ் மாற்றம் கொண்டு சாதாரண வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகளின் தீர்வு காணல்

நடைமுறையில், பின் கூறப்படும் ஒழுங்கினை நாம் பின்பற்றலாம். (x-சார்பில் மாறி ; y-சார்புடை மாறி) கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டில்;

(i) இரு பக்கங்களையும், e^{-px} ஆல் பெருக்கி, 0 முதல் ∞ வரை தொகை கண்டு, இலாப்ளாஸ் மாற்றம் எழுதுக.

(ii) $\overline{B}$ என 19-4-ல் கண்டிருக்கும் வாய்பாட்டை முதனிலை மதிப்புகளோடு பயன்படுத்தி, 19-2·1-ல் கண்ட மாற்றங்களைத் தேவைக்குகந்தபடி பயன்படுத்துக.

(iii) இங்கு ஒரு சாதாரண இயற் கணிதச் சமன்பாடு கிடைக்கும் ; இது துணைச் சமன்பாடெனப்படும் ; இதன் தீர்வு காண்க.

(iv) தீர்வில் $\overline{y}$, அதாவது y-ன் இலாப்ளாஸ் மாற்றம் வரும்.

(v) இலாப்ளாஸ் பிரதி மாற்ற வாய்பாடு கொண்டு y காண்க. சில இயற் கணிதச் சுருக்க முறைகளைப் பயன்படுத்த வேண்டியிருக்கும். பின்வரும் எடுத்துக்காட்டுகள் இம் முறையினை நேரடியாகப் பயன்படுத்திக் காட்டும்.

19-5·1. எடுத்துக்காட்டு 1 :

$L\dfrac{di}{dt} + Ri = E$ என்பது ஒரு மின்னியல் சமன்பாடு.

L – inductance

R – resistance

i — current

t — நேரம் (time)

E – electromotive force

$t=0$, அதாவது துவக்கத்தில் E அளவுள்ள Electromotive force செயற்படுகிறது.

முதனிலை விவரங்கள் :

$t=0$ என்னும்பொழுது $i=0$

t — சார்பில் மாறி ;

i — சார்புடை மாறி ;

முதலில் இரு பக்கங்களையும் e^{-pt} ஆல் பெருக்கி 0 முதல் ∞ வரை தொகை கண்டால்,

$$L\int_0^\infty e^{-pt}\frac{di}{dt}\,dt + R\int_0^\infty e^{-pt}\,i\,dt = E\int_0^\infty e^{-pt}\,dt \qquad \ldots(1)$$

i-ன் இலாப்ளாஸ் மாற்றத்தை $\bar{i}$ எனக் குறியீடு செய்தால்

$$\bar{i} = \int_0^\infty e^{-pt}\, i\, dt$$

$i=0,\ t=0$ என்ற கட்டுப்பாட்டில்

$$\int_0^\infty e^{-pt} \frac{di}{dt}\, dt = -f(0) + p\,\bar{i}$$

$$= 0 + p\,\bar{i}$$

$$\therefore \quad L p \bar{i} + R \bar{i} = \frac{E}{p}$$

இதுதான் துணைச் சமன்பாடெனப்படும்.

$$\therefore \quad \bar{i} = \frac{E}{p\,(L\,p+R)}$$

இலாப்ளாஸ் பிரதி மாற்றத்தைக் கொண்டு i காணலாம்.

அதற்காக

$$\frac{E}{p\,(L\,p+R)} = \frac{E}{R}\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+\frac{R}{L}}\right)$$

எனப் பகுதிப் பின்னமாக எழுதுவோம்.

$\frac{1}{p}$ –ன் பிரதி மாற்றம் 1 ;

$\frac{1}{p+\frac{R}{L}}$ -ன் பிரதி மாற்றம் $e^{-\frac{R}{L}t}$ $\left\{19\text{-}2\cdot1 \text{ வாய்பாடு } (5)\right\}$

எனவே,

$i = \frac{E}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right)$ என்ற தீர்வு பெறுகிறோம்.

சாதாரணமாக நாம் முன் அறிந்த முறையாவது :

$$i\, e^{\frac{R}{L}t} = \int e^{\frac{R}{L}t} \frac{E}{L}\, dt$$

$$= \frac{L}{R} \cdot \frac{E}{L} \cdot E^{\frac{R}{L}t} + A$$

அதாவது $i = \dfrac{E}{R} + A\, e^{-\frac{R}{L}t}$

$t=0$, $i=0$ என்ற முதனிலைக் கட்டுப்பாட்டின்படி,

$$A = -\frac{E}{R}$$

$\therefore\ i = \dfrac{E}{R}\left(1-e^{-\frac{R}{L}t}\right)$ என்ற தீர்வு வரும்.

எடுத்துக்காட்டு 2 :

$$\frac{dy}{dx} + y = e^{ax} \quad (p \neq a)$$

என்ற வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டிற்கு $x=0$, $y=0$, $y(0)=0$ என்னும்பொழுது தீர்வு காண்க. [$y = f(x)$ எனில் $y(0) = f(0)$ எனப் பொருள்படும்.

தீர்வு : இரு புறமும் இலாப்ளாஸ் மாற்றத்தைப் பயன்படுத்த

$L\left[\dfrac{dy}{dx} + y\right] = L\left[\left(e^{ax}\right)\right]$ என்றாகும்.

அதாவது $L\left[\dfrac{dy}{dx}\right] + L[y] = L\left[e^{ax}\right]$

எனவே 19-4 (1)-ன்படி

$-f(0) + PL[y] + L[y] = \dfrac{1}{p-a}$ எனக்கிடைக்கும்.

$f(0) = 0$ என்பதால்,

$$L[y]\,\{p+1\} = \frac{1}{p-a}$$

எனவே $L[y] = \dfrac{1}{(p-a)(1+p)}$ என்றாகும்.

$$y = L^{-1}\left\{\frac{1}{(p-a)(1+p)}\right\}$$

$$= \frac{1}{a+1}\,L^{-1}\left[\frac{1}{p-a}\right] - \frac{1}{a+1}\,L^{-1}\left[\frac{1}{p+1}\right]$$

$$= \frac{1}{a+1}\,e^{ax} - \frac{1}{a+1}\,e^{-x}$$

அதாவது $y = \dfrac{e^{ax}}{a+1} - \dfrac{e^{-x}}{a+1}$

என்பதே தீர்வாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 3 : தீர்வு காண்க :

$$\frac{dy}{dx} + 2y = \sin^2 x\,;$$

$$x=0,\ y=0,\ f(0) = 0$$

இங்கு $L\left[\,f(x)\,\right] = \displaystyle\int_0^{\infty} e^{-sx} f(x)\,dx$ என்ற மரபு பயன் படுத்தப்படுகிறது : ஏனெனில் இம்மரபும் வழக்கிலுள்ளது, அதாவது p-க்கு பதிலாக s பயன்படுத்தப்பட்டிருக்கிறது.

$$L\left[\frac{dy}{dx} + 2y\right] = L\left[\frac{1-\cos 2x}{2}\right]$$

$$\therefore\ -f(0)+s\,L[f(x)]+2\,L[f(x)]$$

$$= \frac{1}{2s} - \frac{s}{2(s^2+4)}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{s^2+4-s^2}{s(s^2+4)}\right]$$

$$= \frac{2}{s\,(s^2+4)}$$

$$\therefore \quad L[f(x)] = \frac{2}{s(s+2)(s^2+4)}$$

$$= \frac{1}{4s} - \frac{1}{8(s+2)} - \frac{\frac{1}{8}s + \frac{1}{4}}{s^2+4}$$

$$= \frac{1}{4s} - \frac{1}{8(s+2)} - \frac{1}{8}\,\frac{s}{s^2+4}$$

$$- \frac{1}{8}\,\frac{2}{s^2+4}$$

$$\therefore \quad f(s) = \frac{1}{4} - \frac{1}{8}e^{-2x} - \frac{1}{8}\cos 2x - \frac{1}{8}\sin 2x$$

எடுத்துக்காட்டு 4 :

$x=0$ ஆகும்பொழுது $y=1$, $y'=0$ என்ற கட்டுப்பாட்டில் $\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வு காண்க.

இலாப்ளாஸ் மாற்றம் செய்தால்

$$\int_0^{\infty} e^{-px} \frac{d^2y}{dx^2}\, dx = -f'(0) - pf(0) + p^2 \bar{y}$$

$$\int_0^{\infty} e^{-px}\, y dx = \bar{y}$$

$f(0) = 1$, $f'(0) = 0$ ஆகையால்

$$-p + p^2 \bar{y} + \bar{y} = 0$$

$$\therefore \quad \bar{y} = \frac{p}{1+p^2}$$

$L^{-1}(\bar{y}) = y = \cos x$ [19-3·1-ல் (7)]

எடுத்துக்காட்டு 5 :

இசையியக்கச் சமன்பாடு : (Simple Harmonic Motion)

$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$ என்ற சமன்பாட்டிற்கு

$t=0,\ x=a,\ \dfrac{dx}{dt}\ 0$ என்ற முதனிலைக் கட்டுப்பாடுகள் கொண்டு தீர்வு காண்க.

$$\int_0^\infty e^{-pt}\,\frac{d^2x}{dt^2}\,dt = -f'(0) - pf(0) + p^2\bar{x}$$

$$\int_0^\infty e^{-pt}\,\omega^2 x\,dt = \qquad \omega^2\bar{x}$$

எனவே. $-pa + p^2\bar{x} + \omega^2\bar{x} = 0$

$$\bar{x} = \frac{pa}{\omega^2+p^2}$$

$$= a\,\frac{p}{p^2+\omega^2}$$

$$\therefore\quad x = a\cos\omega t$$

குறிப்பு : $t=0,\ x=a,\ \dfrac{dx}{dt} = u$ எனக் கொண்டால்,

$x = a\cos\omega t + \dfrac{u}{\omega}\sin\omega t$ எனப் பெறலாமெனக் காண்க.

எடுத்துக்காட்டு 6 :

$\dfrac{d^2y}{dx^2}+8\dfrac{dy}{dx}+15y=0$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வு காண்க.

முதனிலைக் கட்டுப்பாடுகள் $x=0$ என்ருல் $y=1,\ \dfrac{dy}{dx}=3$ எனஆகும்.

இலாப்ளாஸ் மாற்றம் செய்தால்,

$-f'(0)-pf(0)+p^2\bar{y}+8(-f(0)+p\bar{y})+15\bar{y}=0.$

$f'(0)=3$; $f(0)=1$ ஆகையால்

$-3-p+p^2\bar{y}-8+8p\bar{y}+15\bar{y}=0$

$\bar{y}(p^2+8p+15) = p+11$

$$\bar{y} = \frac{p+11}{p^2+8p+15}$$

$$= \frac{4}{p+3} - \frac{3}{p+5}$$

$\therefore \quad y = 4e^{-3x} - 3e^{-5x}$ [19–3·1-ல் (5)]

எடுத்துக்காட்டு 7 :

$\frac{d^4y}{dx^4} + 4\frac{d^3y}{dx^3} + 4\frac{d^2y}{dx^2} = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வு காண்க.

முதனிலைக் கட்டுப்பாடுகள், $x=0$ ஆனுல் $y=1$,
$y'=y''=y'''=0$

இலாப்ளாஸ் மாற்றம் செய்தால்

$-y_0''' - p\,y_0'' - p^2\,y_0' - p^3\,y_0 + p^4\,\bar{y}$
$+4\,(-y_0'' - py_0' - p^2y_0 + p^3\bar{y})$
$+4\,(-y_0' - py_0 + p^2\,\bar{y}) = 0.$

அதாவது $y_0' = y_0'' = y_0''' = 0$ எனவும், $y_0 = 1$ எனவும் ஈடு செய்தால்

$$-p^3 + p^4\bar{y} - 4p^2 + 4p^3\bar{y} - 4p + 4p^2\bar{y} = 0.$$

$\therefore \quad \bar{y}\,(p^4+4p^3+4p^2) = p^3+4p^2+4p$

$\therefore \quad \bar{y} = \frac{1}{p}$

$\therefore \quad y = 1.$

இலாப்ளாஸ் மாற்ற முறையில் பின்வரும் குறியீட்டு முறையிலும் வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகளைத் தீர்க்கலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 8 :

$$\frac{d^4y}{dx^4} - k^4y = 0$$

என்பதை $y(0) = 1$, $y'(0) = y''(0) = y'''(0) = 0$ என்ற முதனிலைக் கட்டுப்பாடுகளைக் கொண்டு தீர்க்கவும்.

$$\frac{d^4y}{dx^4} - k^4y = 0$$

இரு புறமும் இலாப்ளாஸ் மாற்றியைப் பயன்படுத்த

$$p^4L(y)-p^3y\ (0)\ -p^2\ y'(0)\ -py''\ (0)\ -y'''\ (0)\ -k^4\ L(y)=0.$$

எனவே $(p^4-k^4)\ L(y)\ -\ p^3\ =\ 0.$

$$\text{எனவே } L(y) = \frac{p^3}{p^4-k^4}$$

$$= \frac{p^3}{(p^2+k^2)\ \ (p^2-k^2)}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{p}{p^2+k^2} + \frac{p}{p^2+k^2}\right]$$

$$\text{எனவே } y = \frac{1}{2}\left[L^{-1}\left(\frac{p}{p^2+k^2}\right) + L^{-1}\left(\frac{p}{p^2-k^2}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left(\cos Kx + \cosh Kx\right)$$

இந்த முறையில் ஒருங்கமைச் சமன்பாடுகளின் தீர்வுகளையும் காண முடியும்.

எடுத்துக்காட்டு 9 :

$$\frac{dx}{dt} + 2x+y=0$$

$$\frac{dy}{dt} + x+2y=0$$

என்ற சமன்பாடுகளின் தீர்வு காண்க.

முதனிலைக் கட்டுப்பாடுகள் ; $t=0$ என்னும் பொழுது $x=1$, $y=0$ ஆகத் துவக்கம்.

இரு சமன்பாடுகளையும் இலாப்ளாஸ் மாற்றம் செய்தால்

$$-\ x_0+p\ \bar{x}+2\bar{x}+\bar{y}=0$$

$$-\ y_0+p\ \bar{y}+\bar{x}+2\bar{y}=0 \text{ பெறப்படும்.}$$

$\therefore\quad x_0=1,\ y_0=0$ என ஈடு செய்தால்

$$p\ \bar{x}+2\bar{x}+\bar{y}=1$$

$$p\ \bar{y}+\bar{x}+2\bar{y}=0$$

$$\therefore \quad \bar{x}(p+2)+\bar{y}=1$$

$$\bar{x}+\bar{y}(p+2)=0$$

இவ்விரண்டு சமன்பாடுகளிலிருந்து $\bar{x}$, $\bar{y}$ காண்க.

$$\bar{x} = \frac{p+2}{(p+2)^2-1} = \frac{p+2}{(p+3)(p+1)}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p+3}+\frac{1}{p+1}\right)$$

$$\therefore \quad x = L^{-1}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p+3}+\frac{1}{p+1}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left(e^{-3t}+e^{-t}\right)$$

$$\bar{y} = -\frac{1}{(p+2)^2-1} = -\frac{1}{(p+3)(p+1)}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p+3}-\frac{1}{p+1}\right)$$

$$\therefore \quad y = L^{-1}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p+3}-\frac{1}{p+1}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left(e^{-3t}-e^{-t}\right)$$

எடுத்துக்காட்டு 10

19-2·3 எடுத்துக்காட்டு(3)-ல் பெறப்பட்ட முடிவைக்கொண்டு, $\frac{d^2y}{dx^2}+y=x\cos 2x$ என்ற சமன்பாட்டின் முடிவு காண்க. முதனிலைக் கட்டுப்பாடுகள், $x=0$ ஆனால் $y=\frac{dy}{dx}=0$

இரு பக்கங்களுக்கும் இலாப்ளாஸ் மாற்றம் காண,

$$-y_0'-py_0+p^2\bar{y}+\bar{y}=L(x\cos 2x)$$

$$L(x\cos 2x) = A = \int_0^\infty e^{-px}\, x\cos 2x\, dx$$ எனவும்,

$$L(x\sin 2x) = B = \int_0^\infty e^{-px}\, x\sin 2x\, dx$$ எனவும் கொள்க.

$$\therefore \quad A+iB = \int_0^\infty x\, e^{-(p-2i)x}\, dx$$

$$= \left[\frac{-x\, e^{-(p-2i)x}}{p-2i}\right]_0^\infty + \int_0^\infty \frac{e^{-(p-2i)x}}{(p-2i)}\, dx$$

$$= 0 + 0 - \left[\frac{e^{-(p-2i)x}}{(p-2i)^2}\right]_0^\infty$$

$$= \frac{1}{(p-2i)^2}$$

$$= \frac{1}{p^2-4-4ip}$$

$$= \frac{(p^2-4)+(4ip)}{[(p^2-4)-(4ip)]\;[(p^2-4)+4ip]}$$

$$= \frac{p^2-4+4ip}{(p^2+4)^2}$$

$$\therefore \quad A = \text{மெய்யெண் பகுதி} = \frac{p^2-4}{(p^2+4)^2}$$

$$B = \text{கற்பனைப் பகுதி} = \frac{4p}{(p^2+4)^2}$$

எனவே, கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டின் இலாப்ளாஸ் மாற்றம்

$$0-0+(p^2+1)\,\overline{y} = \frac{p^2-4}{(p^2+4)^2}$$

$$\therefore \quad \bar{y} = \frac{p^2-4}{(p^2+1)\,(p^2+4)^2}$$

$$= -\frac{5}{9}\cdot\frac{1}{p^2+1} + \frac{8}{3\,(p^2+4)^2} + \frac{5}{9\,(p^2+4)}$$

$$\therefore \quad y = L^{-1}\left[-\frac{5}{9}\cdot\frac{1}{p^2+1} + \frac{8}{3\,(p^2+4)^2} + \frac{5}{9\,(p^2+4)}\right]$$

$$= -\frac{5}{9}\sin x + \frac{8}{3}\cdot\frac{1}{16}(\sin 2x - 2x\cos 2x)$$

$$+ \frac{5}{9}\cdot\frac{1}{2}\sin 2x.$$

[19-2·3 எடுத்துக்காட்டு (3)]

$$= -\frac{5}{9}\sin x + \sin 2x\left(\frac{5}{18}+\frac{1}{6}\right) - \frac{x}{3}\cos 2x.$$

$$= -\frac{5}{9}\sin x + \frac{4}{9}\sin 2x - \frac{x}{3}\cos 2x.$$

$$9y = 4\sin 2x - 5\sin x - 3x\cos 2x$$

என்பது தீர்வாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 11

$$\frac{dx}{dt} - y = e^t$$

$$\frac{dy}{dt} + x = \sin t.$$

என்ற சமன்பாடுகளின் தீர்வு காண்க. முதனிலைக் கட்டுப்பாடுகள் : $x_0=1;\ y_0=0$

இருபுறமும் இலாப்ளாஸ் மாற்றம் செய்தால்,

$$p\bar{x} - x_0 - \bar{y} = L\,[\,(e^t)\,] = \frac{1}{p-1}$$

எனவே,

$$p\bar{x} - \bar{y} = 1 + \frac{1}{p-1} = \frac{p}{p-1} \qquad (x_0=1) \qquad \text{—(1)}$$

அவ்வாறே

$$p\bar{y} - y_0 + \bar{x} = L[(\sin t)] = \frac{1}{p^2+1}$$

எனவே,

$$p\bar{y} + \bar{x} = \frac{1}{p^2+1} \qquad (y_0=0) \qquad ...(2)$$

(1), (2) என்ற சமன்பாடுகளிலிருந்து,

$$\bar{x} = \frac{p^2}{(p-1)\ (p^2+1)} + \frac{1}{(p^2+1)^2}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{p-1} + \frac{p}{p^2+1} + \frac{1}{p^2+1}\right] + \frac{1}{(p^2+1)^2}$$

$$\therefore \quad x = L^{-1}\left[\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{p-1} + \frac{p}{p^2+1} + \frac{1}{p^2+1}\right\} + \frac{1}{(p^2+1)^2}\right]$$

$$= \tfrac{1}{2}\,(e^t + \cos t + \sin t + \sin t - t\cos t)$$

$$= \tfrac{1}{2}\,(e^t + \cos t + 2\sin t - t\cos t)$$

19-2·3-க்குப்பின் உள்ள எடுத்துக்காட்டு (3) காண்க.

$$\bar{y} = \frac{p}{(p^2+1)^2} - \frac{p}{(p-1)\ (p^2+1)}$$

$$= \frac{p}{(p^2+1)^2} - \frac{1}{2}\left[\frac{1}{p-1} - \frac{p}{p^2+1} + \frac{1}{p^2+1}\right]$$

$$\therefore \quad y = L^{-1}\left[\frac{p}{(p^2+1)^2} - \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{p-1} - \frac{p}{p^2+1} + \frac{1}{p^2+1}\right\}\right]$$

$$= \tfrac{1}{2}\,(t\sin t - e^t + \cos t - \sin t)$$

19-2·1 பட்டியலில் 15ஆவது வாய்பாடு காண்க.

பயிற்சி 19·2

இலாப்ளாஸ் மாற்றம் கொண்டு, பின்வரும் சமன்பாடுகளின் தீர்வு காண்க.

சமன்பாடுகள்	முதனிலைக் கட்டுப்பாடுகள்
(1) $\frac{dy}{dx}-2y=1-2x$	$x=0,\quad y=3.$
(2) $\frac{dx}{dt}-ax=e^{at}$	a—மாறிலி, $t=0,\quad x=0.$
(3) $4\frac{dy}{dx}+2y=100\cos x$	$x=0,\quad y=0$
(4) $(D^2+4)\,y=4$	$x=0,\quad y=6,\ \frac{dy}{dx}=-3$
(5) $\frac{d^2y}{dt^2}+10\frac{dy}{dt}+25y=0$	$x=0,\quad y=\frac{dy}{dx}=1$
(6) $\frac{d^3y}{dx^3}+y=1$	$x=0,\quad y=y'=y''=0$
(7) $\frac{d^3y}{dx^3}-2\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{dy}{dx}+2y=4x^2$	$x=0,\quad y=6,\ \frac{dy}{dx}=4,\ \frac{d^2y}{dx^2}=8.$
(8) $5\frac{dx}{dt}-2\frac{dy}{dt}+4x-y=e^{-t}$, $\frac{dx}{dt}+8x-3y=5e^{-t}$	$t=0,\quad x=y=0.$
(9) $\frac{dx}{dt}=x-2y$, $\frac{dy}{dt}=5x+3y$	$t=0;\quad x=y=1.$

(10) $\left.\begin{array}{l} 6\dfrac{d^2x}{dt^2} - 3\dfrac{dx}{dt} \\ +6x+\dfrac{dx}{dt} = t \\ \dfrac{d^2x}{dt^2} + 8x + y = 0 \end{array}\right\}$ $t=0;\ x = \dfrac{11}{36}$; $y = -\dfrac{22}{9};\ \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{1}{6}$

(11) $(D^2+2D+2)y = e^{-x}$ $x=0,\ y=y'=0$

விடை 19·2

(1) $y = x+3e^{2x}$

(2) $x = te^{at}$

(3) $y = 20 \sin x + 10 \cos x - 10\, e^{-x/2}$

(4) $y = 5 \cos 2x - \frac{3}{2} \sin 2x + 1$

(5) $y = (1+6t)\, e^{-5t}$

(6) $y = 1 - \frac{1}{3}e^{-x} - \frac{2}{3}\, e^{x/2} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x$

(7) $y = 2x^2+2x+5+e^{2x}$

(8) $x = e^t+2e^{-t}-3e^{-2t}$
$y = 3e^t+3e^{-t}-6e^{-2t}$

(9) $x = e^{2t} (\cos 3t - \sin 3t)$
$y = e^{2t} (\cos 3t + 2 \sin 3t)$.

(10) $36x = 6t+11$
$36y = -48t-88$.

(11) $y = e^{-x} (1-\cos x)$

எடுத்துக்காட்டு 12

$$\frac{d^2\theta_0}{dt^2} + 2\,\xi\,\omega\,\frac{d\theta_0}{dt} = \omega^2\,(\theta_i - \theta_0)$$

என்பது ஒரு வகைக்கெழுச் சமன்பாடு,

$\xi = 1$; $\theta_i = \Omega t$ (Ω – மாறிலி); $t = 0$ என்னும்பொழுது

$$\theta_0 = \frac{d\theta_0}{dt} = 0$$

இலாப்ளாஸ் மாற்றங் கொண்டு

$$\theta_0 = \Omega\left\{t - \frac{2}{\omega} + \left(t + \frac{2}{\omega}\right) e^{-\omega t}\right\}$$

என நிறுவுக.

இரு பக்கங்களுக்கும் இலாப்ளாஸ் மாற்றம் செய்ய,

$$-\left(\frac{d\theta_0}{dt}\right)_0 - p(\theta_0)_0 + p^2\,\overline{\theta_0}$$

$$+2\,\xi\,\omega\,[-(\theta_0)_0 + p(\overline{\theta_0})] = \omega^2\,(\overline{\theta_i} - \overline{\theta}_0)$$

முதனிலைக் கட்டுப்பாடுகளை ஈடு செய்ய,

$$p^2\overline{\theta}_0 + 2\omega\,(p\,\overline{\theta}_0) = \omega^2\left(\frac{\Omega}{p^2} - \overline{\theta_0}\right)$$

$$\therefore\quad (p^2 + 2\omega p + \omega^2)\,\overline{\theta}_0 = \omega^2\,\frac{\Omega}{p^2}$$

$$\therefore\quad \overline{\theta_0} = \frac{\omega^2\Omega}{p^2(p+\omega)^2}$$

$$= \frac{\Omega}{p^2} - \frac{2\Omega}{\omega p} + \frac{\Omega}{(p+\omega)^2} + \frac{2\Omega}{\omega(p+\omega)}$$

$$\therefore\quad \theta_0 = L^{-1}\left[\Omega\left(\frac{1}{p^2} - \frac{2}{\omega p} + \frac{1}{(p+\omega)^2} + \frac{2}{\omega(p+\omega)}\right)\right]$$

$$= \Omega\left(t - \frac{2}{\omega} + t\,e^{-\omega t} + \frac{2}{\omega}\,e^{-\omega t}\right)$$

$$= \Omega\left\{t - \frac{2}{\omega} + \left(t + \frac{2}{\omega}\right) e^{-\omega t}\right\}$$

என நிறுவப்படுகிறது.

19-6 : பெருக்கல் தேற்றம் (Convolution theorem)

தேற்றம் : $\overline{f}(p)$, $\overline{g}(p)$ என்பவை $f(x)$, $g(x)$ என்ற சார்புகளின் இலாப்ளாஸ் மாற்றமாக இருப்பின் $\overline{f}(p) \cdot \overline{g}(p)$ என்பது $\int_0^x f(x-u) \cdot g(u)\, du$-ன் இலாப்ளாஸ் மாற்றமாகும்; அதாவது

$$L\left[\int_0^x f(x-u) \cdot g(u)\, du\right] = \overline{f}(p) \cdot \overline{g}(p)$$

தெரிப்பு :

$$F(x) = \int_0^x f(x-u) \cdot g(u)\, du \text{ எனக் கொள்வோம்.}$$

அப்பொழுது

$$L[F(x)] = \int_0^\infty e^{-px} \left\{ \int_0^x f(x-u) \cdot g(u)\, du \right\} dx$$

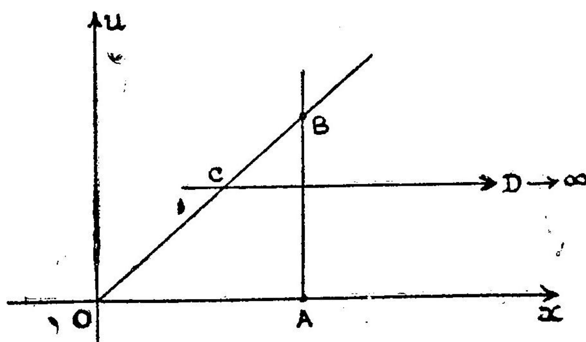
$$= \int_0^\infty \int_0^x e^{-px} f(x-u)\, g(u)\, du\, dx$$

இங்கு e^{-px} என்பது தொகைக்குள் கொண்டு செல்லாம். ஏனெனில் x என்பது u ஐப் பொருத்தல்ல. அதாவது

$$L[F(x)] = \int_0^\infty \int_{u=0}^{u=x} e^{-px} f(x-u)\, g(u)\, du\, dx \qquad \ldots(1)$$

(1) என்ற இரு தொகையீட்டு முறையில் முதலில் u ஐப் பொறுத்தும், பின்னர் x ஐப் பொறுத்தும் தொகை காண்கிறோம். இப்பொழுது முதலில் x ஐப் பொறுத்தும் பின்னர் u ஐப் பொறுத்தும் தொகை காண விழைவோம். Ox, Ou என்ற இரு

அச்சுகளை எடுத்துக் கொள்வோம். 1-ல் u என்ற மாறி $u=0$ முதல் $u=x$ என்ற கோடு வரை செல்கின்றது. பின்னர் x என்ற



மாறி $x=0$ முதல் $x=\infty$ வரை செல்கிறது. நாம் u ஐப் பொறுத்து முதலில் தொகை காண்பதால், u அச்சுக்கு இணையாக AB என்ற கோட்டினை வரைந்தோம். பின்னர் x அச்சுக்கு இணையாக CD என்ற கோட்டினை வரைந்தோம். (1) என்ற தொகையானது $e^{-px} f(x-u)\, g(u)$ என்ற சார்பின் தொகை $u=x$, $u=0$ என்ற கோட்டினுல் அடைபட்ட பரப்பினுல் காண்க என்ற பொருளைக் குறிக்கும். ஆகவே, இதன் தொகையை முதலில் xஐப் பொறுத்தும் பின்னர் u ஐப் பொறுத்தும் காண்போமேயானுல், முதலில் CD என்ற திசையிலும் பின்னர் AB என்ற திசையிலும் காண்போம் என்ற பொருளாகும். CD என்ற திசையில் x என்பது $x=u$-லிருந்து $x=\infty$ வரை செல்லும். மேலும் u என்பது $u=0$-லிருந்து $u=x=\infty$ வரை செல்லும். எனவே, (1)ஐத் தொகை மாற்றம் கண்டு எழுத,

$$L\,\{F(x)\} = \int_0^\infty e^{-px}\,dx \int_0^x f(x-u)\, g(u)\, du$$

$$= \int_0^\infty g(u) \left\{ \int_u^\infty e^{-px} f(x-u)\, dx \right\} du$$

இப்பொழுது $x-u=z$ எனக் கொண்டால்

$dx=dz$ என்றும்,

$x=u$ எனில் $z=0$ என்றும்,

$x=\infty$ எனில் $z=\infty$ என்றும் கிட்டும்.

ஆகவே

$$L\{F(x)\} = \int_0^{\infty} g(u)\, e^{-up} \left\{ \int_0^{\infty} e^{-pz} f(z)\, dz \right\} du$$

$$= \int_0^{\infty} g(u)\, e^{-up}\, \bar{f}(p)\, du$$

$$= \bar{f}(p) \cdot \bar{g}(p)$$

அதாவது

$$L\left[\int_0^{x} g(u) \cdot f(x-u)\, du \right] = \bar{f}(p) \cdot \bar{g}(p)$$ என்ருகும்.

19-8·1. இப் பெருக்கல் தேற்றம் பல இடங்களில் பயன்படும். $F(p)$ என்ற ஓர் இலாப்ளாஸ் மாற்றம் பெற்ற முதற் சார்பினை நாம் நேரடியாகக் காண முடியவில்லையெனக் கொள்வோம்.

அந்த நிலையில் $F(p)$ஐ, $\bar{f}(p) \cdot \bar{g}(p)$ என்று ஒரு பெருக்கல் தொகையாக நாம் பெற முடியுமாஞல்,

$$L^{-1}\left[F(p) \right] = L^{-1}\left[\bar{f}(p) \cdot \bar{g}(p) \right]$$

$$= \int_0^{x} f(x-u)\, g(u)\, du$$

என நாம் கண்ட பெருக்கல் தேற்றம் பயன்படும். அப்பொழுது,

$\int_0^{x} f(x-u)\, g(u)\, du$ என்பது f, g என்ற சார்புகளின் 'பெருக்கல்' (Convolution) எனக் கூறப்படுவதுமரபு; எழுதும் மரபு, $f * g$ என்பதாகும்.

அதாவது

$$f * g = \int_0^x f(x-u)\, g(u)\, du$$

என்பது பொருளாகும்.

மேலும் $f * g = g * f$ என்பதும் உண்மையே. இதை மிக எளிதில் காணலாம்.

19-6·11 : எடுத்துக்காட்டு 1

$L^{-1}\left[\dfrac{a}{p(p-a)}\right]$-ன் மதிப்பென்ன ?

$$\bar{f}(p) = \frac{a}{p}$$

$$\bar{g}(p) = \frac{1}{p-a}$$ எனவும் கொள்க.

$$\therefore\ L\left[\int_0^x f(x-u)\, g(u)\, du\right] = \frac{a}{p} \cdot \frac{1}{p-a}$$

$$\therefore\ L^{-1}\left[\frac{a}{p} \cdot \frac{1}{p-a}\right] = \int_0^x f(x-u)\, g(u)\, du$$

$\bar{f}(p) = \dfrac{a}{p}$ ஆனல், $f(x)=a$

$\bar{g}(p) = \dfrac{1}{p-a}$ ஆனல் $g(x)=e^{ax}$

$$\therefore\ L^{-1}\left[\frac{a}{p} \cdot \frac{1}{p-a}\right] = \int_0^x a\, e^{au}\, du$$

$$= \left[e^{au}\right]_0^x$$

$$= e^{ax}-1$$

$f * g = g * f$ என்று நாம் முன் பத்தியில் குறிப்பிட்டபடி,

$$L^{-1}\left[\frac{a}{p}\cdot\frac{1}{p-a}\right]=\int_0^x g(x-u)\,f(u)\,du$$

$$=\int_0^x e^{a(x-u)}\,a\,du$$

$$=a\,e^{ax}\int_0^x e^{-au}\,du$$

$$=e^{ax}\int_0^x a\,e^{-au}\,du$$

$$=e^{ax}\left[-e^{-au}\right]_0^x$$

$$=e^{ax}\left[-e^{-ax}+1\right]$$

$= e^{ax}-1$ என வருவதும் காண்க.

குறிப்பு :

$\dfrac{a}{p(p-a)}\equiv\left(\dfrac{1}{p-a}-\dfrac{1}{p}\right)$ என நமக்குத் தெரியுமாதலால்

$$L^{-1}\left(\frac{a}{p(p-a)}\right)=L^{-1}\left(\frac{1}{p-a}-\frac{1}{p}\right)$$

$= e^{ax}-1$ என நேரடியாகவும் பகுதி பின்ன முறைப்படி, அதே விடை வருவதும் காண்க

பயிற்சி 19·3

$f(x)$, $g(x)$ என்ற சார்பு இரட்டைகள் கொடுக்கப்பட்டிருக்கின்றன. பெருக்கல் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தி $f * g$ காண்க. {அதாவது $L^{-1}[\bar{f}(p)\,.\,\bar{g}(p)]$ காண்க.}

(1) $\sin ax$; 1

(2) e^{ax} ; x

(3) e^{ax} ; e^{bx}

(4) $\sin ax$; $\sin bx$

(5) $L\left[\dfrac{1}{\lfloor n-1} \displaystyle\int_0^x (x-u)^{n-1} f(u)\, du\right]$-ன் மதிப்பு

$p^{-n}\,\bar{f}(p)$ என நிறுவுக ; n ஒரு கூட்டு முழு எண்.

அதிலிருந்து

$$\underbrace{\int_0^x \int_0^x \cdots\cdots \int_0^x}_{n \text{ முறை}} f(x)\, \underbrace{dx \;\; dx \;\; \ldots \;\; dx}_{n \text{ முறை}}$$

$$= \frac{1}{\lfloor n-1} \int_0^x (x-u)^{n-1} f(u)\, du$$

எனப் பெறுக.

விடை 19·3

(1) $\dfrac{1-\cos ax}{a}$

(2) $\dfrac{e^{ax}-ax-1}{a^2}$

(3) $\dfrac{e^{ax}-e^{bx}}{a-b}$

(4) $\dfrac{b \sin ax - a \sin bx}{b^2-a^2}$

புத்தகப் பட்டியல்
(Bibliography)

புத்தகம் I-ல் கொடுக்கப்பட்டதற்கு இணைப்பு

1. ஸ்னெட்டன், I. : *பகுதி வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகள்* (Ian Sneddon: Elements of Partial Differential Equations).

2. ஹில்ட்பிராண்ட், F. B. : *பயன்பாட்டு முறைகளுக்குரிய உயர் நுண்கணிதம்.* (F. B. Hildebrand: Advanced Calculus for applications).

கலைச்சொல்லகராதி

(புத்தகம் I-ல் கொடுக்கப்பட்ட 'கலைச்சொல்லகராதி'யின் தொடர்ச்சி)

Arbitrary function	—தன்னிச்சையான சார்பு
Characteristic of the envelope	—சிறப்பு வளை வரை
Convolution theorem	—பெருக்கல் தேற்றம்
Cylinder	—உருளை
Ellipsoid	—கன நீள் வளையம்
Envelope	—வரை தொடு பரப்பு
Equivalent	—மாற்றிணையான, சமதன்மை பெற்ற
,, equations	—மாற்றிணையான சமன்பாடுகள்
Hyperbola	—அதி பரவளையம்
Hyperbolic cylinder	—அதி பரவளைய உருளை
Initial conditions	—முதனிலைக் கட்டுப்பாடுகள்
Integral	—தொகை, தீர்வு
,, general	—பொதுத் தீர்வு (தொகை)
,, particular	—சிறப்புத் தீர்வு (தொகை)
,, singular	—தனிச் சிறப்புத் தீர்வு (தொகை)
,, transform	—தொகை மாற்றம்
Inverse	—பிரதி மாற்றம்
Kernel	—கரு மூலம்
Laplace transform	—இலாப்ளாஸ் மாற்றம்
,, transformation	—இலாப்ளாஸ் மாற்றமைப்பு
Laplace inverse transform	—இலாப்ளாஸ் பிரதி மாற்றம்
Mathematical physics	—கணிதம் சார் இயல்பியல்
Surface	—பரப்பு

தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனம்
சென்னை-600031



3456

தமிழில் பயில்பவர்க்குக் கல்லூரிப் பாடநூல்கள்
(Tamil Medium Books for Colleges)

இதுவரை 606 நூல்கள் வெளியிடப்பட்டுள்ளன

மேலும், விரைவில் வெளிவருபவை



பொறியியல்	—	43	நூல்கள்
சட்டம்	—	19	,,
மருத்துவம்	—	9	,,
இயற்பியல்	—	27	,,
வேதியியல்	—	21	,,
தாவரவியல்	—	17	,,
விலங்கியல்	—	7	,,
கணிதம்	—	19	,,
வணிகவியல்	—	30	,,
பொருளாதாரம்	—	21	,,
புவியியல்	—	12	,,
வரலாறு	—	36	,,
மனையியல்	—	2	,,
தத்துவம்	—	5	,,
உளவியல்	—	4	,,
புள்ளியியல்	—	2	,,
கல்வி	—	3	,,
நிலப் பொதியியல்	—	3	,,
அரசியல்	—	25	,,

கிடைக்குமிடம் :

தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனக் கிடங்கு
(கல்லூரிக் கல்வி இயக்குநர் அலுவலகச் சுற்றுக்குள்)
கல்லூரிச் சாலை, நுங்கம்பாக்கம்
சென்னை-600006

கல்லூரிப் பாடநூல்களுக்கு 20% கழிவு வழங்கப்படும்